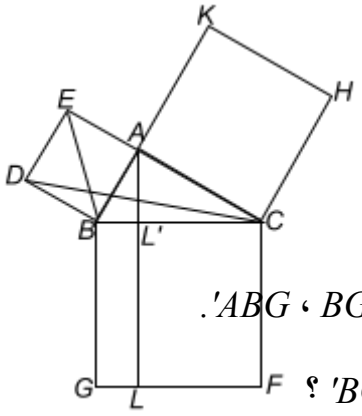
إثبات مبرهنة فيثاغورس باستعمال المساحات : تنسب هذه الطريقة لإقليدس.

ABC مثلث قائم في A ، $ABDE$ ، $BCFG$ ، $ACHK$ مربعات منشأة على أضلاعه $[AC]$ ، $[BC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

لإثبات أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ يكفي التحقق من أن مساحة المربع $BCFG$ تساوي مجموع مساحتي المربعين $ABDE$ و $ACHK$.



ليكن (AL) عموديا على (GF) في النقطة L ، و L' نقطة تقاطع $[AL]$ و $[BC]$.

1) بين أن للمثلثين BED و BCD نفس المساحة، وكذلك بالنسبة للمثلثين BGL ، ABG'.

2) بين أن المثلثين ABG و BCD متقايسان.

3) ماذا تستنتج بخصوص مساحة المربع $ABDE$ و مساحة المستطيل $BGLL'$ ؟

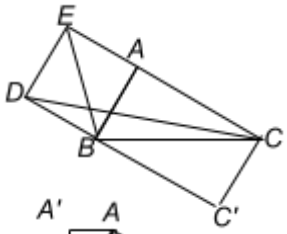
4) كرر نفس الاستدلال بالنسبة إلى مساحة المربع $ACHK$ ومساحة المستطيل $CFLL'$.

5) استنتج مبرهنة فيثاغورس.

الحل :

1) تبيان أن للمثلثين BED و BCD نفس المساحة،

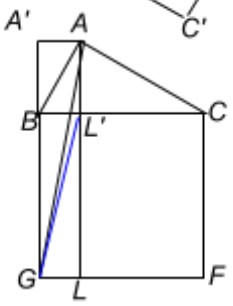
نرمز بـ : s للمساحة



$$s(BED)=\frac{1}{2}DE\times DB \quad \text{و} \quad s(BCD)=\frac{1}{2}DB\times CC'$$

و $CC'=DE$ إذن : $s(BCD)=\frac{1}{2}DB\times DE$ ومنه : $s(BED)=s(BCD)$

تبيان أن للمثلثين BGL ، ABG' نفس المساحة :

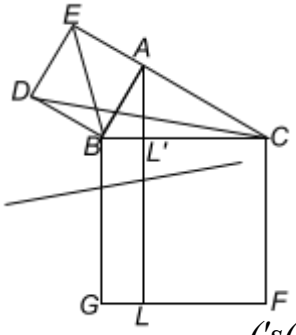


$$s(BGL')=\frac{1}{2}BG\times BL' \quad \text{و} \quad s(ABG)=\frac{1}{2}BG\times AA'$$

و $BL=AA'$ إذن : $s(ABG)=\frac{1}{2}BG\times BL'$ ومنه : $s(ABG)=s(BGL')$

2) تبيان أن المثلثين ABG و BCD متقايسان.

لدينا : $AB=DB$ و $BG=BC$



$A\hat{B}D=C\hat{B}G=90°$ ومنه : $A\hat{B}D+A\hat{B}C=C\hat{B}G+A\hat{B}C$

إذن : $A\hat{B}G=C\hat{B}D$ ومنه ABG و BCD المثلثان متقايسان

3) ماذا تستنتج بخصوص مساحة المربع $ABDE$ و مساحة المستطيل $BGLL'$ ؟

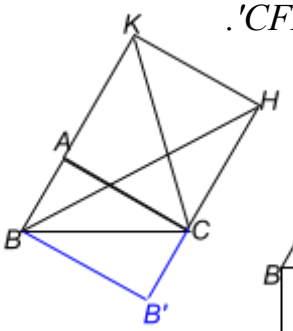
لدينا : المثلثان ABG و BCD متقايسان إذن : $s(ABG)=s(BCD)$

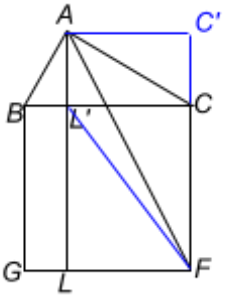
ولدينا : $s(BCD)=s(BED)$ و $s(ABG)=s(BGL')$ إذن : $s(BED)=s(BGL')$

ومنه $s(BGL)=2s(BED')$ أي : $s(ABDE)=s(BGLL')$

4) كرر نفس الاستدلال بالنسبة إلى مساحة المربع $ACHK$ ومساحة المستطيل $CFLL'$.

- تبيان أن للمثلثين CHK و CBH نفس المساحة:





$$s(CBH)=\frac{1}{2}CH\times BB' \quad \text{و} \quad s(CHK)=\frac{1}{2}CH\times HK$$

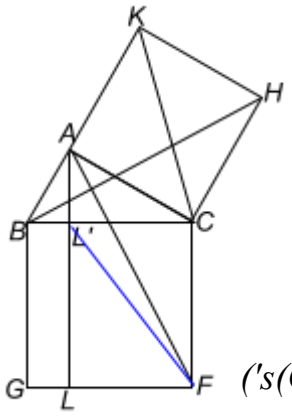
لدينا :

ولدينا : $BB'=AC=HK$ إذن : $s(CHK)=s(CBH)$

- تبيان أن للمثلثين ACF و CFL' نفس المساحة:

$$s(CFL')=\frac{1}{2}CF\times CL' \quad \text{و} \quad s(ACF)=\frac{1}{2}CF\times AC'$$

لدينا :



ولدينا : $AC' = CL$ إذن : $s(ACF) = s(CFL')$

- نقارن بين المثلثين CBH و ACF :

لدينا : $CB = CF$ و $CH = CA$

و $H\hat{C}A = F\hat{C}B = 90°$ ومنه : $H\hat{C}A + A\hat{C}B = F\hat{C}B + A\hat{C}B$

إذن : $H\hat{C}B = F\hat{C}A$ وبالتالي المثلثان CBH و ACF متقايسان .

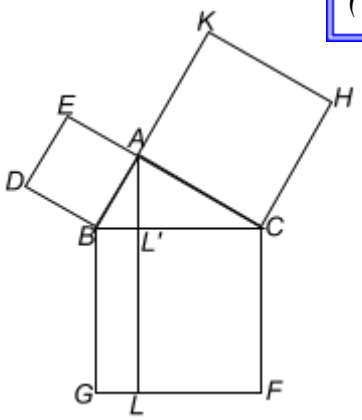
- مقارنة مساحة المربع $ACHK$ ومساحة المستطيل $CFLL'$.

لدينا : المثلثان CBH و ACF متقايسان ومنه $s(CBH) = s(ACF)$

ولدينا : $s(CHK) = s(CBH)$ و $s(ACF) = s(CFL')$ إذن : $s(CHK) = s(CFL')$

ومنه : $2s(CHK) = 2\, s(CFL')$ وبالتالي : $s(ACHK) = s(CFLL')$

5) استنتاج مبرهنة فيثاغورس.



لدينا مما سبق : $s(BGLL') = s(ABDE)$ و $s(CFLL') = s(ACHK)$

إذن : $s(BGLL') + s(CFLL') = s(ABDE) + s(ACHK)$

ولدينا : $s(BGLL') + s(CFLL') = s(BCFG)$

إذن : $s(BCFG) = s(ABDE) + s(ACHK)$

وبالتالي : $AB^2 + AC^2 = BC^2$