

مسألة إدماجية

(1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

(1) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

(2) قارن $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$.

(2) علم على المستقيم العددي النقاط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ؟

(3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتائج السابقة

حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (2)؟
الحل:

(1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

(1) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

نميز حالتين:

إذا كان: $0 < a < \sqrt{2}$ فإن: $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$ ولدينا: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن: $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$
وبالتالي: $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$

إذا كان: $a > \sqrt{2}$ فإن: $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\frac{2}{a} < \frac{2}{\sqrt{2}}$ ولدينا: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن: $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$
وبالتالي: $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$

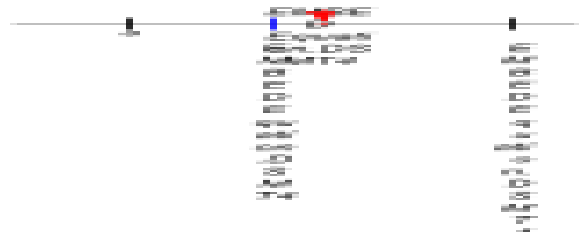
(2) قارن $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$.

بما أن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.
فإن: $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) - \sqrt{2} = \frac{a^2 + 2 - 2a\sqrt{2}}{2a} = \frac{(a - \sqrt{2})^2}{2a}$
ومنه: $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) - \sqrt{2} > 0$ و $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) > \sqrt{2}$

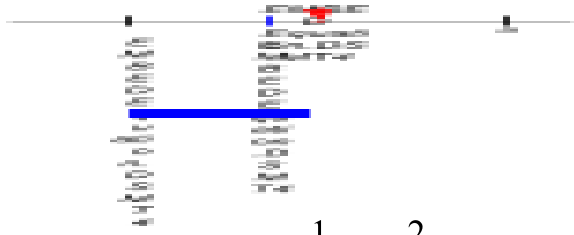
(2) علم على المستقيم العددي النقاط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ؟

في حالة: $0 < a < \sqrt{2}$



$$\sqrt{2} \in]a ; \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})[$$



في حالة : $a > \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \in]\frac{2}{a} ; \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})[$$

(3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتائج السابقة

حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (2) ؟

بتعويض a بالعدد 1 نجد : $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) = \frac{3}{2}$ وبالتالي : $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ أي : $\sqrt{2} \in]1 ; \frac{3}{2}[$

بتعويض a بالعدد $\frac{3}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$ و $\frac{2}{a} = \frac{4}{3}$ وبالتالي : $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$

$$\sqrt{2} \in]\frac{4}{3} ; \frac{17}{12}[$$

طول المجال $]1 ; \frac{3}{2}[$ هو 0,083 وطول المجال $]1 ; \frac{3}{2}[$ هو 0,5

إذن $\sqrt{2} \in]\frac{4}{3} ; \frac{17}{12}[$ هو أفضل حصر لأن طول هذا المجال هو الأصغر.