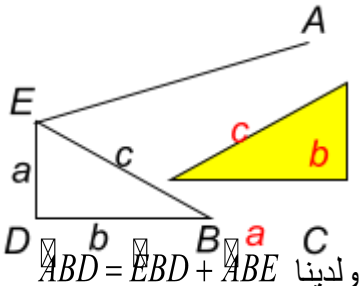
3. مبرهنة فيثاغورس:

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة فيثاغورس وعكسها و توظيفها في حل مسائل هندسية . النسب المثلثية .

نشاط 9 :

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه c ، b ، a ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث D ، B ، C في استقامية و $BD = AC$.



1) بين أن الزاوية ABE قائمة .
2) ما نوع الرابعي $ACDE$ ؟
3) أحسب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين .
4) استنتج علاقة بين c^2 و b^2 ، a^2 .

حل النشاط 9 :

1) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD} = \widehat{EBD} + \widehat{ABE}$

ومنه : $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \widehat{EBD} + \widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD} = \widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB} = \widehat{ABE} = 90°$

2) نوع الرابعي $ACDE$:

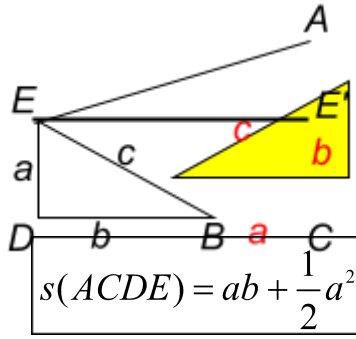
الرابعي $ACDE$ شبه منحرف قائم .

3) حساب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : $s(ACDE) = 2\ s(ABC) + s(ABE)$

ومنه : $\boxed{s(ACDE) = ab + (c^2/2)}$

الطريقة الثانية : $s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')$



$$s(ACDE) = a(b+a) + \frac{1}{2}(b+a)(b-a)$$

ومنه :

$$s(ACDE) = ab + a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

أي :

$$\boxed{s(ACDE) = ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2}$$

وبالتالي :

4) استنتج علاقة بين c^2 و b^2 ، a^2 :

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

من السؤال السابق نستنتج أن :

ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$

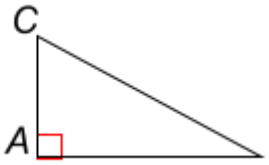
مبرهنة فيثاغورس وعكسها :

مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)

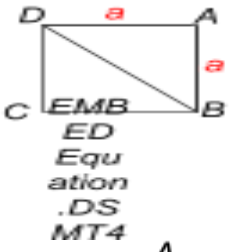
إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A.



مثال 1: $ABCD$ مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ ومنه : $BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$



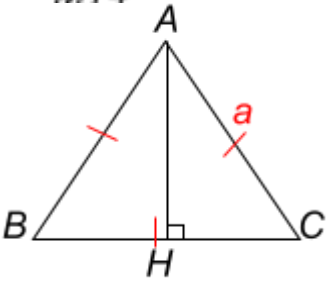
مثال 2:

ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

أحسب الطول AH .

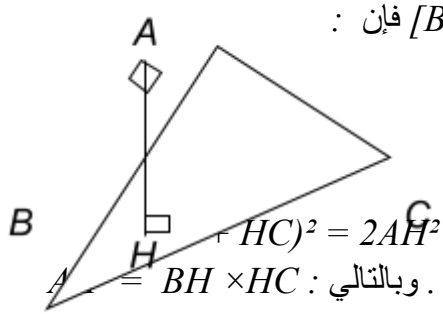
حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$



ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج :



إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ فإن :

1) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (من المساحة)

2) $AH^2 = HC \cdot HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2)$

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\,BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AB^2 = BH \times HC$

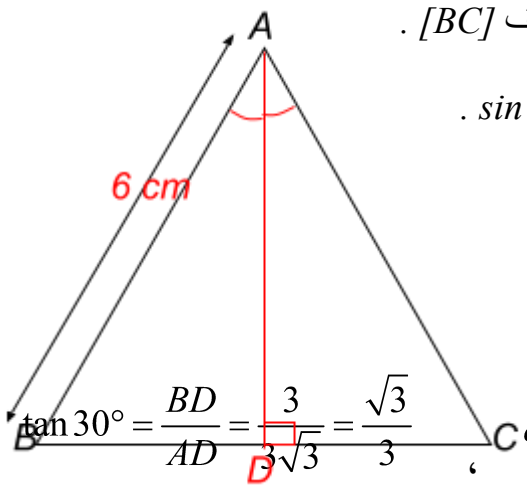
3) $AB^2 = BH \cdot BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $(AB^2 = BH \times (HC + BH$

وبالتالي : $AB^2 = BH \cdot BC$

4) $AC^2 = CH \cdot CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط 10 :



ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $6\ cm$ ، النقطة D منتصف $[BC]$.

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من $\tan 30°$ ، $\cos 30°$ ، $\sin 30°$.

حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف : ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{\alpha \text{ Øæá ÇáÖ áÚ ÇáãÞÇÈ á á}}{\text{Øæá ÇáæÊÑ}} = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $\cos\alpha = \frac{\alpha \text{ رواجملا علضلا لوط}}{\text{رتولا لوط}} = \frac{AC}{AB}$

ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

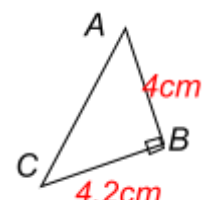
نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

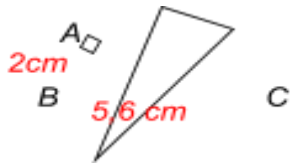
تطبيق 1 : 49 صفحة 241

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1 الحالة 2

11





حل التطبيق :

الحالة *1* : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 = (4^2 + 4{,}2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33{,}64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5{,}8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$\widehat{ABC} = 90°$

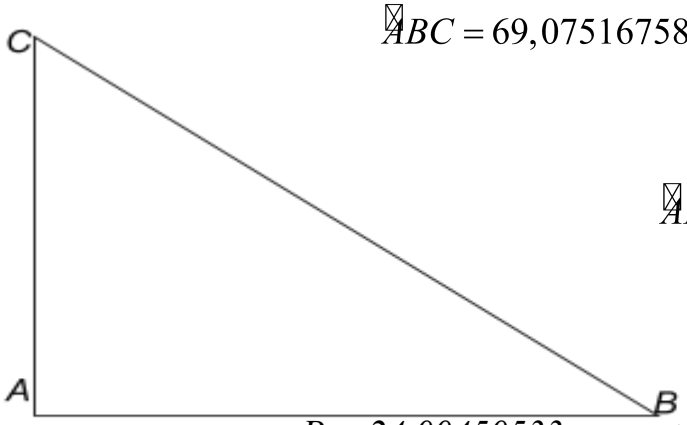
الحالة *2* : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 = (5{,}6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35{,}36\ cm^2$ ومنه $AC = 5{,}946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$\cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5{,}6} = 0{,}347142857...$

ومنه : $\widehat{ABC} = 69{,}07516758...°$



وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

تطبيق 2 : *50* صفحة *241*

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

حل التطبيق :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6{,}01815023...$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7{,}9863551...$.

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24{,}00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB \times AC)/2$ ومنه : $s = 24{,}0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $s = 24\ cm^2$.

تطبيق 3 : *51* صفحة *241*

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $5\ cm$ ، $12\ cm$ ، $13\ cm$ ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التطبيق :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة $[BC]$ ونصف قطرها يساوي $6{,}5\ cm$.

استعمال تكنلوجية الإعلام والاتصال :

الهدف من النشاط هو البحث عن الثلاثيات من الأعداد الطبيعية التي تكون أطوال أضلاع مثلث قائم .

مثلا الثلاثية $(3\ ،\ 4\ ،\ 5)$ لدينا : $5^2 = 4^2 + 3^2$ تحقق مبرهنة فيثاغورس وتسمى هذه الثلاثية بثلاثية فيثاغورسية .

وللبحث عن الثلاثيات نستعمل برنامج *Excel* .

1. ليكن x و y عددين طبيعيين حيث : $x > y$. بين أن الثلاثية $(x^2 - y^2\ ,\ 2xy\ ,\ x^2 + y^2)$ هي ثلاثية فيثاغورسية .

لدينا : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 - 2(xy)^2 + 4(xy)^2$ ومنه : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 + 2(xy)^2$

إذن : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ وهذا هو المطلوب.

2. نعتبر مثلثا ABC قائما في A ، حيث : $AB = x^2 - y^2$ و $AC = 2xy$ و $x > y$ فيكون : $BC = x^2 + y^2$.

[illegible]							
x	y	AB	AC	BC		$AB^2 + AC^2$	BC^2
2	1	3	4	5		25	25
3	1	8	6	10		100	100
3	2	5	12	13		169	169
4	1	15	8	17		289	289
4	2	12	16	20		400	400
4	3	7	24	25		625	625
5	1	24	10	26		676	676
5	2	21	20	29		841	841
5	3	16	30	34		1156	1156
5	4	9	40	41		1681	1681
6	1	35	12	37		1369	1369
6	2	32	24	40		1600	1600
6	3	27	36	45		2025	2025
6	4	20	48	52		2704	2704
6	5	11	60	61		3721	3721
7	1	48	14	50		2500	2500
7	2	45	28	53		2809	2809
7	3	40	42	58		3364	3364
7	4	33	56	65		4225	4225
7	5	24	70	74		5476	5476
7	6	13	84	85		7225	7225
8	1	63	16	65		4225	4225
8	2	60	32	68		4624	4624
8	3	55	48	73		5329	5329
8	4	48	64	80		6400	6400
8	5	39	80	89		7921	7921
8	6	28	96	100		10000	10000
8	7	15	112	113		12769	12769
9	1	80	18	82		6724	6724
9	2	77	36	85		7225	7225
9	3	72	54	90		8100	8100
9	4	65	72	97		9409	9409
9	5	56	90	106		11236	11236
9	6	45	108	117		13689	13689
9	7	32	126	130		16900	16900
9	8	17	144	145		21025	21025
10	1	99	20	101		10201	10201
10	2	96	40	104		10816	10816
10	3	91	60	109		11881	11881
10	4	84	80	116		13456	13456
10	5	75	100	125		15625	15625
10	6	64	120	136		18496	18496
10	7	51	140	149		22201	22201
10	8	36	160	164		26896	26896
10	9	19	180	181		32761	32761
11	1	120	22	122		14884	14884
11	2	117	44	125		15625	15625
11	3	112	66	130		16900	16900
11	4	105	88	137		18769	18769
11	5	96	110	146		21316	21316
11	6	85	132	157		24649	24649
11	7	72	154	170		28900	28900
11	8	57	176	185		34225	34225
11	9	40	198	202		40804	40804
11	10	21	220	221		48841	48841
12	1	143	24	145		21025	21025