6. المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

الكفاءات المستهدفة : المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .

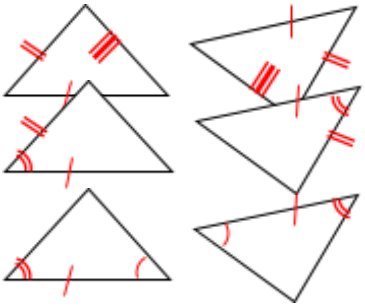
1) تقايس مثلثين :

تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

ملاحظة : إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

نتيجة : المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

خواص : *(حالات تقايس مثلثين)*



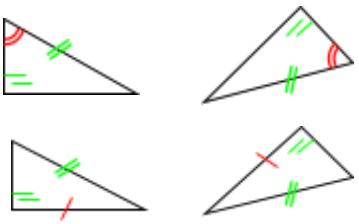
خاصية 1 : يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.

خاصية 2 : يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

خاصية 3 : يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

حالات خاصة : *(تقايس مثلثين قائمين)*

قائمان وتراهما BC و $B'C'$ متقايسان



خاصية 1 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.

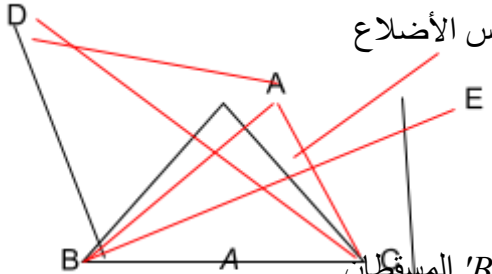
خاصية 2 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

تطبيق 1 : *85 صفحة 245*

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ مثلثين ABD وACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : $BE = CD$.

الحل :



لدينا : $\widehat{CAE} = \widehat{BAD} = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD وACE متقايس الأضلاع

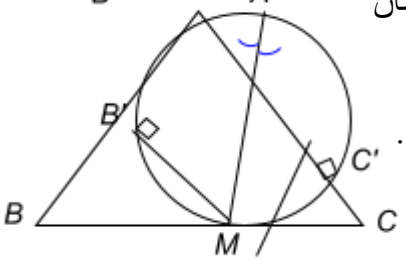
ومنه : $\widehat{CAE} + \widehat{CAB} = \widehat{BAD} + \widehat{CAB}$ إذن : $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : $AB = AD$ و $AE = AC$

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : $BE = CD$.

تطبيق 2 : *96 صفحة 247*

ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و $[B'C']$ المسقطان العموديان للنقطة M على $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.



1) بين أن المثلثين $AC'M$ ، $AB'M$ متقايسان.

2) بين أن النقط C ، M ، B' ، A' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

3) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

الحل :

1) بين أن المثلثين $AC'M$ ، $AB'M$ متقايسان.

لدينا : المثلثان $AC'M$ ، $AB'M$ قائمان ولهما وتر مشترك $[AM]$ و $\widehat{B'AM} = \widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

2) بين أن النقط C ، M ، B' ، A' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AB'MC'$ إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر $[AM]$ ومركزها منتصف $[AM]$.

3) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي $AB'MC'$ ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر $[AM]$ هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي $AB'MC'$ هو مربع.

نشاط :

ADE و $A'B'C$ مثلثان حيث : $A'B' = AD$ و $A'C = AE$ و $\widehat{A} = \widehat{A'}$

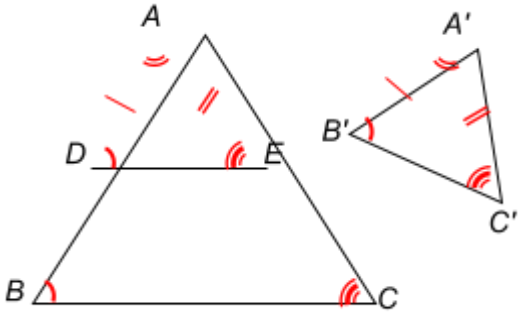
نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث $(DE) // (BC)$.

1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و $A'B'C$ واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

2) بين أن زوايا المثلثين $A'B'C$ و ABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE و ABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.



حل النشاط :

1) لدينا : $A'B' = AD$ و $A'C = AE$ و $\widehat{A} = \widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE و $A'B'C$ هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D} = \widehat{B'}$ ، $\widehat{E} = \widehat{C'}$ و $DE = B'C'$

2) لدينا : $(DE) // (BC)$ إذن : $\widehat{D} = \widehat{B}$ ، $\widehat{E} = \widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ، $\widehat{C} = \widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A} = \widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE و ABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث $A'B'C$ هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$

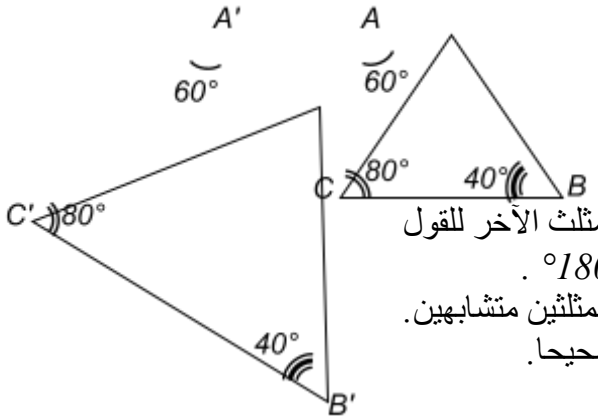
لدينا :$(BC) // (ED)$ وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

وبما أن : $A'B' = AD$ و $A'C = AE$ و $B'C = DE$ فإن $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

2) تشابه مثلثين :

تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال : المثلثان ABC و $A'B'C$ متشابهان.



الرؤوس المتماثلة : A B C و A' B' C

الأضلاع المتماثلة : $[AB]$ و $[A'B']$ ؛ $[AC]$ و $[A'C]$ ؛ $[BC]$ و $[B'C]$.

ملاحظات :

1 - يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$.

2 - إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 - المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة : المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

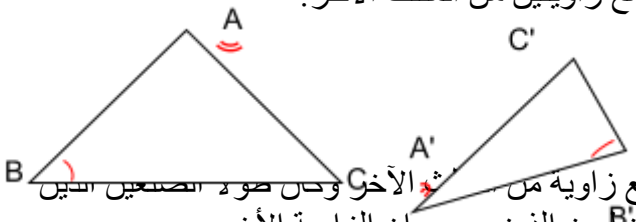
تعريف : ليكن ABC و $A'B'C$ مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$

ملاحظات : لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C$ حيث $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$

1 - $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C$.
2 - إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث $A'B'C$ هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .
3 - إذا كان $k > 1$ فإن المثلث $A'B'C$ هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .
4 - إذا كان $k = 1$ فإن المثلث $A'B'C$ يقايس المثلث ABC .

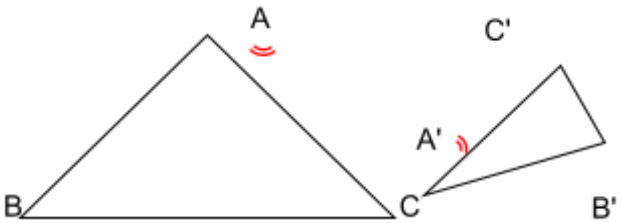
خواص : (حالات تشابه مثلثين)

خاصية 1: يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.



مثال : بما أن : $\hat{A} = \hat{A'}$ و $\hat{B} = \hat{B'}$
فإن المثلثان ABC و $A'B'C$ متشابهين .
ملاحظة : المثلث $A'B'C$ هو تصغير للمثلث ABC

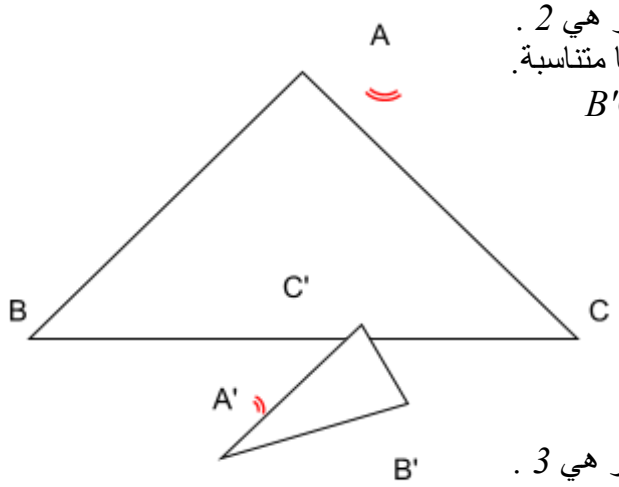
خاصية 2 : يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.



مثال : $\hat{A} = \hat{A'}$ و $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$
و $AB = 4\ cm$ و $AC = 3\ cm$
لدينا : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{2} = 2$ و $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{1,5} = 2$
إذن : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = 2$ ومنه المثلثان ABC و $A'B'C$ متشابهان .
ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C$ ونسبة التكبير هي 2 .

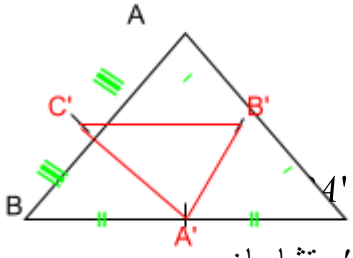
خاصية 3: يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

مثال : $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$ و $B'C' = 2,4\ cm$
و $AC = 4,5\ cm$ و $AB = 6\ cm$ و $BC = 7,2\ cm$
لدينا : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{2} = 3$ و $\frac{AC}{A'C'} = \frac{4,5}{1,5} = 3$
و $\frac{BC}{B'C'} = \frac{7,2}{2,4} = 3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 3$
إذن : المثلثان ABC و $A'B'C$ متشابهان .
ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C$ ونسبة التكبير هي 3 .



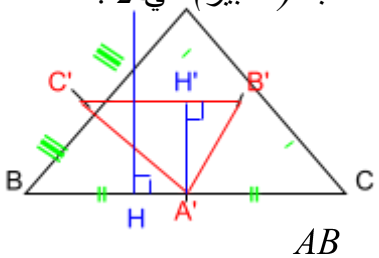
تطبيق : 90 صفحة 246
ABC مثلث ، C ، B' ، A' منتصفات أضلاعه $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$ على الترتيب.
1) بين أن المثلثين ABC و $A'B'C$ متشابهان ، وعين نسبة التشابه.
2) أحسب النسبة $\frac{(ABC)\text{ãÓ¢É}}{(A'B'C')\text{ãÓ¢É}}$.

الحل :
1) تبيان أن المثلثين ABC و $A'B'C$ متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.
لدينا : C ، B' ، A' منتصفات أضلاعه $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$ على الترتيب.
إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : $(A'B') // (AB)$ و $A'B' = AC' = BC'$
ومنه : الربعان $AB'A'C'$ و $BA'B'C'$ متوازيا أضلاع
إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\hat{C'AB'} = \hat{C'A'B'}$ و $\hat{A'} = \hat{C'B'A'}$
ومنه : $\hat{CAB} = \hat{C'A'B'}$ و $\hat{CBA} = \hat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و $A'B'C$ متشابهان.



النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .



2) حساب النسبة $\frac{(ABC)\text{مساحة}}{(A'B'C')\text{مساحة}}$.

H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و $(B'C')$ على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و $A'H'B'$ متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

$\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ و $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ أي : ومنه $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}=2$ ومنه $A'H=2\,A'H'$. ومنه : $AH\times BC=2\,(2A'H')(2B'C')=4(2A'H'\times B'C')=4\times(A'B'C\text{ مساحة})=(ABC)\text{مساحة}$

إذن : $\frac{(ABC)\text{مساحة}}{(A'B'C')\text{مساحة}}=4$.