II) المعلم للمستوي

نشاط :

J ، I ، O ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية.

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعان من المستوي حيث $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$

1) بين أن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا.ماذا تسمى الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ؟

2) A نقطة من المستقيم (OI) و B نقطة من المستقيم (OJ) حيث $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=5\vec{j}$

أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. ماذا تمثل الثنائية $(3\ ;\ 5)$ بالنسبة إلى النقطة M وبالنسبة إلى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ؟

3) $\vec{u}$ شعاع من المستوي حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ عين العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

حل النشاط :

1) لدينا النقط J ، I ، O متمايزة إذن الشعاعان $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ غير معدومين .

وبما أن هذه النقط ليست في استقامية فإن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا

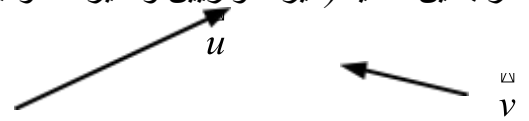
الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ تسمى معلما للمستوي.

2) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ومنه : $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$

الثنائية $(3\ ;\ 5)$ هي إحداثيتي النقطة M وتمثل المركبتين السلميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$

3) $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ إذن $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ معناه $x=3$ و $y=5$

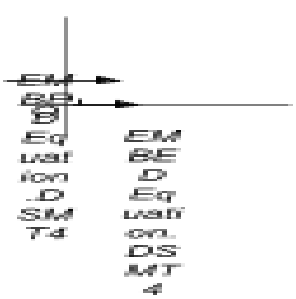
تعريف 1 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي. نقول عن الثنائية $(\vec{u}\,;\vec{v})$ أنها أساس للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيين و غير معدومين)

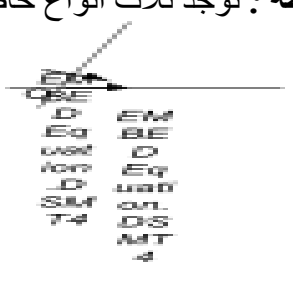


تعريف 2 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي و A نقطة منه . نقول عن الثلاثية $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ أنها معلما للمستوي إذا كانت $(\vec{u}\,;\vec{v})$ أساسا للمستوي.

- النقطة A تسمى مبدأ المعلم
- المحور $(A\,;\vec{u})$ يسمى محور الفواصل ؛ المحور $(A\,;\vec{v})$ يسمى محور التراتيب .

ملاحظة : توجد ثلاث أنواع خاصة للمعالم :





$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ $\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ معلم متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ معلم متعامد $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس

مبرهنة 1 : $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ معلم للمستوي.

من أجل كل نقطة M من المستوي توجد ثنائية وحيدة $(x ; y)$ من الأعداد الحقيقية بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

ملاحظة :

إذا كانت $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ فإن الثنائية $(x ; y)$ تسمى إحداثيا النقطة M في المعلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ونكتب $M(x ; y)$ ، العدد الحقيقي x يسمى فاصلة النقطة M والعدد الحقيقي y يسمى ترتيبها.

ونكتب كذلك $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ والثنائية $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تسمى المركبتين السلّميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$ في الأساس $(\vec{i} ; \vec{j})$

العدد الحقيقي x يسمى المركبة الأولى للشعاع $\overrightarrow{OM}$ العدد الحقيقي x يسمى المركبة الثانية له.

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ **تعني** $M(x ; y)$ في المعلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ **ومعناه** $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ في الأساس $(\vec{i} ; \vec{j})$

تمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.

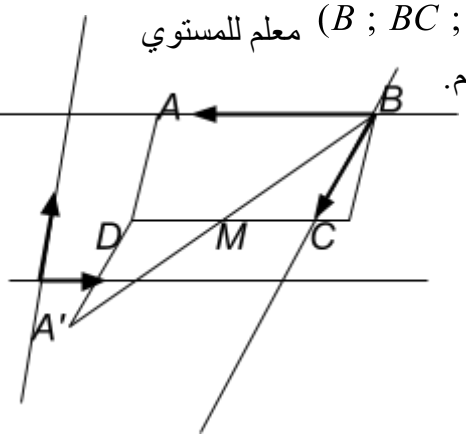
1) بين لماذا يمكن اعتبار $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟
2) عين إحداثيي كل من النقط A ، M ، D ، C ، B ، A' في هذا المعلم.
3) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

الحل :

1) بين لماذا يمكن اعتبار $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي : $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي

2) عين إحداثيي كل من النقط A ، M ، D ، C ، B ، A' في هذا المعلم.



لدينا : $\overrightarrow{BA} = 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A(0 ; 1)$ في المعلم $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB} = 0\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $B(0 ; 0)$ في المعلم $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $C(1 ; 0)$ في المعلم $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 1\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $D(1 ; 1)$ في المعلم $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1 ; \frac{1}{2})$ في المعلم $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ومنه : $A'(2\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

3) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نفرض أن : M' منتصف $[BA']$ إذن : $M'(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \frac{1}{2})$

إذن M' منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نتائج : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي و k عدد حقيقي.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ $x = x'$ و $y = y'$
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3. $k.\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

مبرهنة 2 : *(إحداثيي منتصف قطعة)*

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي و $B(x_B\ ;\ y_B$ ، $A(x_A\ ;\ y_A)$ نقطتان منه.

إحداثيا النقطة M منتصف $[AB]$ هما $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

مبرهنة 3 : *(مركبتا شعاع)*

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي . و $B(x_B\ ;\ y_B$ ، $A(x_A\ ;\ y_A)$ نقطتان منه.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

مبرهنة 4 : *(شرط الارتباط الخطي لشعاعين)*

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي ، $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان $x\,y' - x'\,y = 0$.

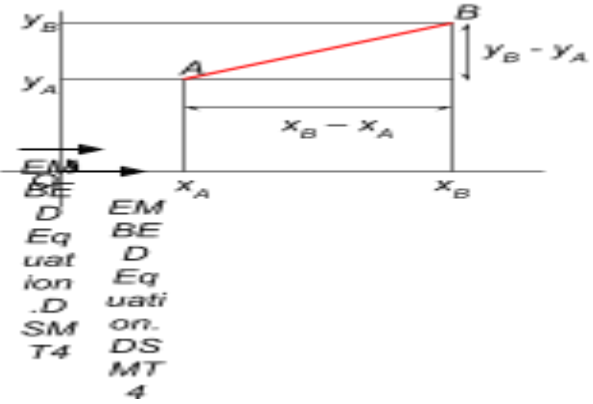
مبرهنة 5 : *(المسافة بين نقطتين)*

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

و $B(x_B\ ;\ y_B$ ، $A(x_A\ ;\ y_A)$ نقطتان منه.

المسافة بين النقطتين A و B هي : $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



تمرين : 50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. ليكن $\vec{u} = 4\,\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{v} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$

1) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

2) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

الحل :

1) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

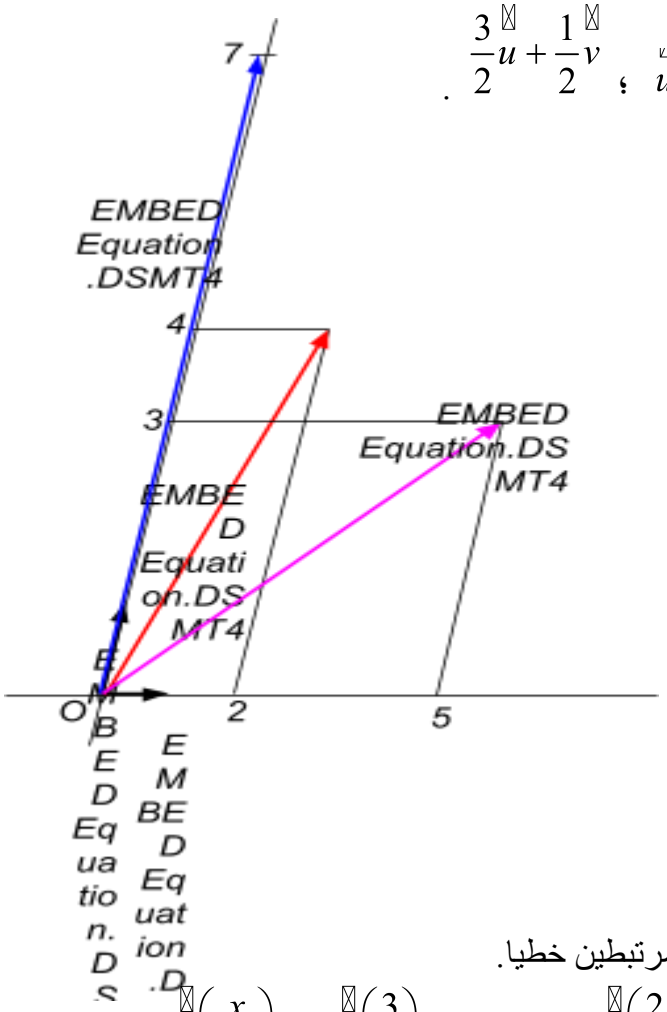
$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}=7\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

2) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



تمرين : 56 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times 6-2(x+1)=0$ معناه $x=$

2

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2=81$ يكافئ أن $x=9$ أو $x=-9$.