I) الأشعة والحساب الشعاعي

1 - مفهوم الشعاع :

تعريف : A ، B نقطتان من المستوي. نقول أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ تعين **شعاعا** نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.

- إذا كانت النقطة A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
- يسمى طول القطعة المستقيمة $[AB]$ **طويلة** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإن **منحى** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB).
- إذا كان للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ نفس المنحى ، وبوضع $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v'} = \overrightarrow{AC}$ فإنه :

✔ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ **نفس الاتجاه** إذا كانت النقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم $[AB)$.

✔ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ **اتجاهان متعاكسان** إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[BC]$.

$\vec{v}$ و $\vec{v'}$ لهما اتجاهان متعاكسان

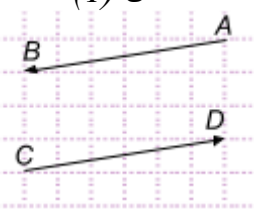
$\vec{v}$ و $\vec{v'}$ لهما نفس الاتجاه

ليس للشعاع المعدوم منحى.

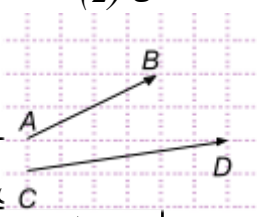
نشاط 1 : *(تساوي شعاعين)*

1) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

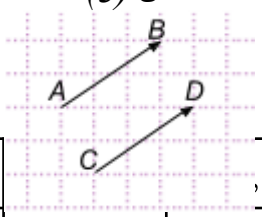
الشكل *(1)*



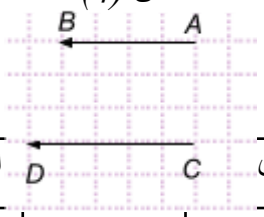
الشكل *(2)*



الشكل *(3)*



الشكل *(4)*



الشكل	الشكل *(4)*				$\overrightarrow{AB}$ ،
نفس المنحى					
نفس الاتجاه					
نفس الطويلة					

2) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

حل النشاط :

1) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

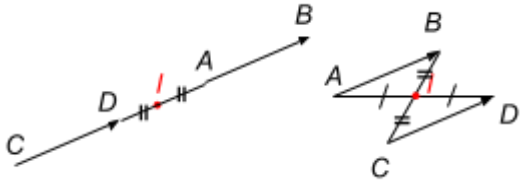
هل للشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$	الشكل *(1)*	الشكل *(2)*	الشكل *(3)*	الشكل *(4)*
نفس المنحى	نعم	لا	نعم	نعم
نفس الاتجاه	لا	لا	نعم	نعم
نفس الطويلة	نعم	لا	نعم	لا

2) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *(الجواب الشكل 3)*

2 - تساوي شعاعين :

تعريف : نقول عن شعاعين أنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و نفس الطويلة.

مثال :



$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

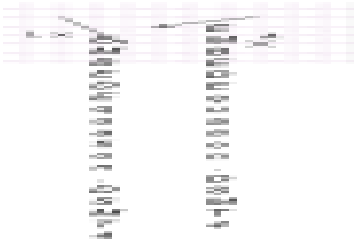
نتيجة : من أجل كل أربع نقط D ، C ، B ، A من المستوي لدينا :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **معناه** $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف.

نشاط 2 : *(مجموع شعاعين)*

1) أنقل الشكل المجاور على ورقة مسطرة ، وعلم النقطتين B ، C حيث :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



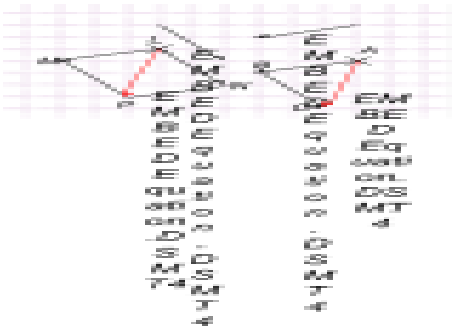
2) ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{AC}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

3) علم النقطتين M ، N حيث : $\overrightarrow{LM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{LN}=\vec{v}$ ،
ثم أنشئ النقطة P بحيث يكون الرباعي $LMPN$ متوازي أضلاع.

4) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{LP}$.

5) ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{LP}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

حل النشاط :



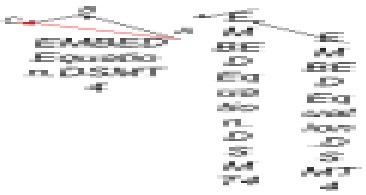
لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{NP}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LN}=\vec{v}$

ومنه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LP}$

إذن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{LP}$

3 - مجموع شعاعين :



تعريف : مجموع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}+\vec{v}$
والمعرف كما يأتي :إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي حيث :
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ فإن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

نتائج :

- من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *(هذه العلاقة تسمى علاقة شال)*
- إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ حيث : $ABDC$ متوازي أضلاع
- إذا كان الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

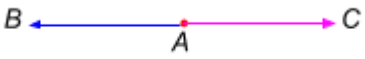
4 - الشعاعان المتعاكسان :

من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

تعريف : نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

نتائج :

- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعاكسان



- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** A منتصف $[BC]$.
- إذا كان $AB=AC$ و A ، B ، C ليست في استقامية فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ *(أي* $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متعاكسين*)*

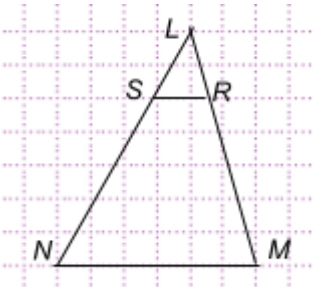
نشاط 3 : *(جداء شعاع بعدد حقيقي)*

1) علم نقطتين متمايزتين A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.

1) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

2) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

3) عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ثم عبر عن $\overrightarrow{AB}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$.



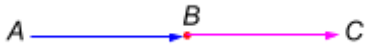
2) في الشكل المقابل ، المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

1) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطولية.

2) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{SR}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MN}$.

حل النشاط :

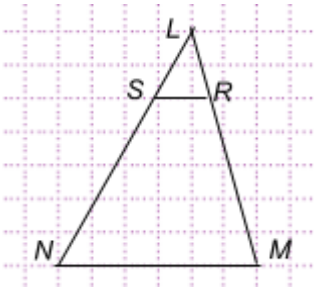
1) A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.



إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ولكن طويلتيهما مختلفتين . ولدينا $AC = 2\,AB$.

ومنه : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



2) لدينا : المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

إذن : $\frac{MN}{SR}=\frac{7}{2}$ ومنه $SR=\frac{2}{7}MN$

الشعاعان $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ لهما نفس المنحى واتجاهان متعاكسان وطويلتان مختلفتان.

$\overrightarrow{SR}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$.

5 - جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف : $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، و k عدد حقيقي غير معدوم.

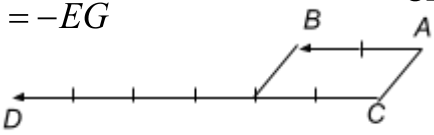
جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $k.\vec{u}$ والمعرف كما يأتي :

- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس المنحى.
- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان k موجب تماما و لهما اتجاهان متعاكسان إذا كان k سالب تماما.
- طويلة الشعاع $k.\vec{u}$ تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد $|k|$ أي : $\|k.\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

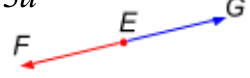
ملاحظة : عندما يكون $\vec{u}=\vec{0}$ أو $k = 0$ نقبل اصطلاحا أن $k.\vec{u}=\vec{0}$

أمثلة :

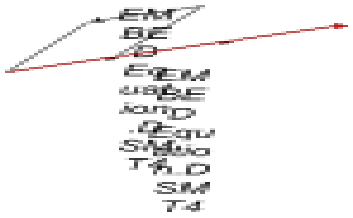
$\overrightarrow{CD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{EG}$



$\vec{v}=-3\vec{u}$



خواص :

1. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.

2. $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$.

3. $k(k'\vec{u})=kk'\vec{u}$.

4. $1\vec{u}=\vec{u}$.

5. $k\vec{u}=\vec{0}$ يكافئ (يعني) [k = 0 أو $\vec{u}=\vec{0}$].

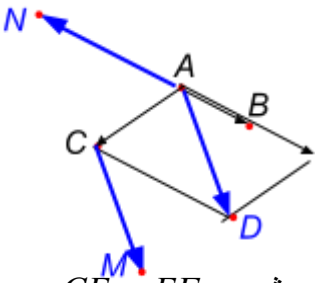
تطبيق : 34 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

1- أنشئ النقطتين M ، N المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب :

$\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

2- بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.



الحل :

1- نضع $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}$

2- لدينا : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف $[MN]$.

نشاط 4 :

1) أرسم متوازي أضلاع $ABCD$ مركزه النقطة O ، وعلم النقطتين F ، E من $[BC]$ حيث : $CE=EF=FB$

2) أنشئ النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$.

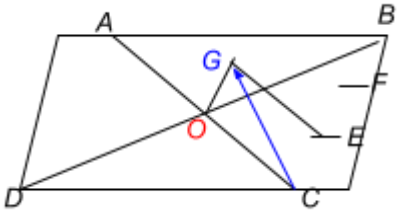
3) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$. ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

حل النشاط :

1) $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O ،

لدينا F ، E من $[BC]$ حيث : $CE=EF=FB$

2) إنشاء النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$.



3) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$ ومنه $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CE}$ إذن : $\overrightarrow{AF}=2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$ أي : $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$

ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$ ومنه $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AG}$ أي : $(AF)\ //\ (AG)$ وبالتالي : النقط A ، G ، F في استقامية.

6 - توازي شعاعين :

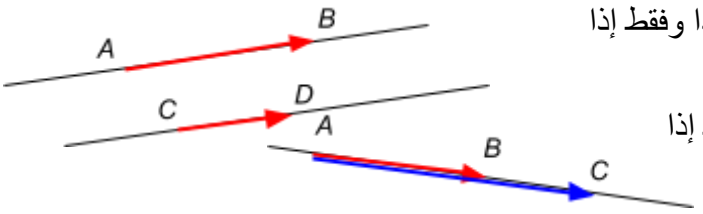
تعريف : نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطين خطيا** إذا كان أحدهما يساوي **جداء الآخر بعدد حقيقي**.

أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k.\vec{u}$.

ملاحظة : الشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع . لأنه من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من المستوي لدينا : $\vec{0}=0.\vec{u}$

نتيجة : يكون الشعاعان غير المعدومين **مرتبطين خطيا** إذا وفقط إذا كان لهما **نفس المنحى**.

7 - التوازي والاستقامية :



مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيين** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ **مرتبطين خطيا**.

مبرهنة 2 : تكون النقط A ، B ، C في **استقامية** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **مرتبطين خطيا**.

تمرين 45 صفحة 275

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

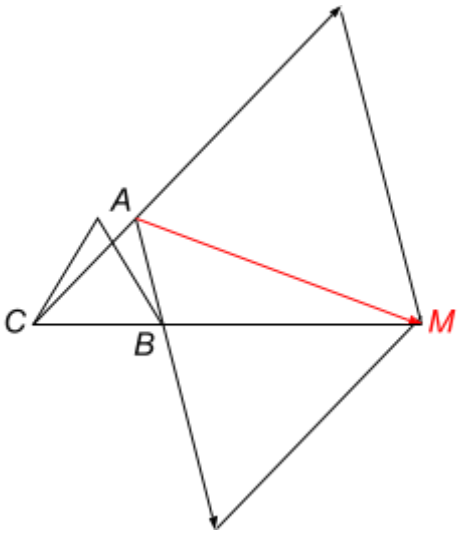
1- أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

2- بين أن النقط M ، B ، C في استقامية .

(إرشاد : عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

الحل :

1- أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$



2- بين أن النقط M ، B ، C في استقامية .

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

أي : $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(CM)\ //\ (CB)$

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط M ، B ، C في استقامية .