المتتـاليـات

1- المستـــوى: الثالثة تسيير واقتصاد

2-الكفاءات المستهدفة:

*** تبيان إن متتالية محدودة من الأعلى ، محدودة من الأسفل أو محدودة.

*** التعرف إن كانت متتالية رتيبة .

*** التعرف إن كانت متتالية متقاربة.

*** التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = au_n + b$

*** البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالات بسيطة.

3- المدة اللازمة : 12 ساعة

4- الوسائل التعليمية : الكتاب ـــ مرجع في المتتاليات العددية --

5-الأستاذ: سعدالدين أحسن

بطاقة رقم 01: المتتاليات المحدودة والمتتاليات الرتيبة المدة اللازمة لدرس : ساعتان

المهـــارة	الـــــدرس: **المتتاليات المحدودة والمتتاليات الرتيبة**	الزمن

حل النشاط رقم 02 ص 06 — 15

1. المتتاليات المحدودة : — 15

تعاريف : (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$

1) المتتالية المحدودة من الأعلى :

القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n

$u_n \le A$ من نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.

2) المتتالية المحدودة من الأدنى :

القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n

$u_n \ge B$ من نقول أن B عنصر حاد من الأعلى.

3) المتتالية المحدودة : — 15

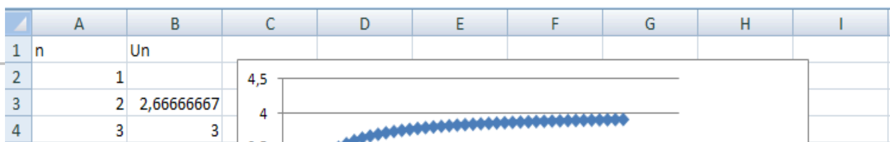
القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل .

أي أن إذا وجد عددان حقيقيان B و A

بحيث : $B \le u_n \le A$ من أجل كل عدد طبيعي n .

مثال1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \dfrac{4n}{n+1}$

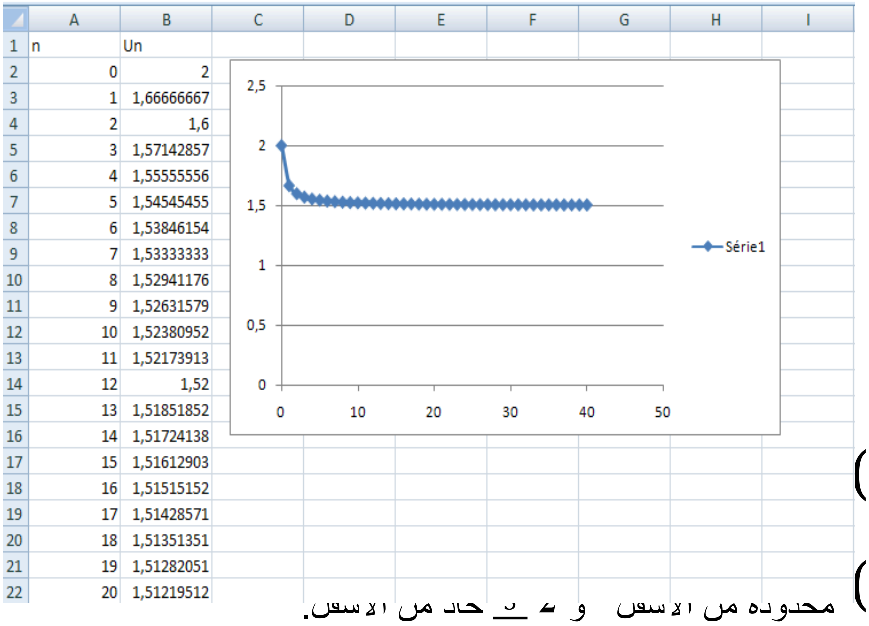


المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و4 حاد من الأعلى .

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و2 حاد من الأسفل.

مثال2:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}$



	A	B
1	n	Un
2	0	2
3	1	1,66666667
4	2	1,6
5	3	1,57142857
6	4	1,55555556
7	5	1,54545455
8	6	1,53846154
9	7	1,53333333
10	8	1,52941176
11	9	1,52631579
12	10	1,52380952
13	11	1,52173913
14	12	1,52
15	13	1,51851852
16	14	1,51724138
17	15	1,51612903
18	16	1,51515152
19	17	1,51428571
20	18	1,51351351
21	19	1,51282051
22	20	1,51219512

اتجاه تغير دالة

20

المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و $\frac{3}{2}$ حد من الأسفل.

2) المتتاليات الرتيبة

1. متتالية متزايدة : تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما)
إبتداء من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$
على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

2. متتالية متناقصة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما)
05 إبتداء من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$
على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

15 3. متتالية ثابتة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة ابتداء ، من الرتبة n_0

إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

.

4. متتالية رتيبة : المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I أو متناقصة (قصة تماما على الترتيب) على المجال I (رتيبة تماما على الترتيب).

ملاحظات :

1. توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة نقول أنها غير رتيبة .
2. تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وجد عدد حقيقي k حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=k$.

الطرائق

15

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n+2}{2n+1}$

أثبت إن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\dfrac{3}{2}$.

الحل:

بما أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_n-\frac{3}{2}=\frac{3n+2}{2n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2(2n+1)}>0$$

فان:

$$u_n>\frac{3}{2}$$

إذن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\dfrac{3}{2}$.

طريقة: ص 11

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n+2}{2n+1}$

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الحل:

لتكن الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة $[0;+\infty[$ ب: $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$.

20

التقويم

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x)=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}<0$

أي أن f دالة متناقصة على $[0;+\infty[$ وبالتالي المتتالية (u_n).

طريقة : ص11

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ أو نقارن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1أو ندرس اتجاه تغير الدالة المعرفة $[0;+\infty[$ في حالة متتالية حدها العام $u_n=f(n)$.

التمرين الثالث : تمرين 18 ص 23

الحل :

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)}\times\frac{n^2}{4^n}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$$

وبما أن من أجل كل $n\geq 1$ فان $n+n\geq n+1$ أي أن $2n\geq n+1$ أي $\dfrac{2n}{n+1}$ و هذا يكافئ

أن $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^2\geq 1$ أي أن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ وبما أن كل الحدود موجبة فان المتتالية (u_n) متزايدة.

تمرين رقم 11ص22

تمرين رقم 16 ص23

تمرين رقم 18 ص23

بطاقة رقم 02: نهاية متاليات — المدة اللازمة لدرس : ساعتان

المهـــارة	الـــــدرس: المتتاليات المتقاربة	الزمن
النهايات	**2. المتتاليات المتقاربة** لما تأخذ الحدود u_n متتالية قيما قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي ℓ لما يأخذ العدد الطبيعي قيما كبيرة بالقدر الكافي ، نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي ℓ لما يؤول n إلى $+\infty$ إن المتتالية (u_n) كمتقاربة وتتقارب نحو ℓ. ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ **3. ملاحظات** ● ندرس نهية المتتالية دائما عند $+\infty$.	15

- اذا لم تكن المتتالية متقاربة فانها متباعدة .

مثال:

النهايات على الدوال

15

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}$

تتقارب نحو العدد $\dfrac{3}{2}$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

4. المتتاليات ذات الحد العام $u_n = f(n)$

خاصية :

النهايات على الدوال

يمثل α عددا حقيقيا ، $-\infty$ أو $+\infty$. (u_n) متتالية من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

اذا كانت إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

مبرهنة :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال من الشكل $]a;+\infty[$ حيث a عدد حقيقي .

1) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

15

2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

ملاحظة :

النتائج و المبرهنات حول النهايات في الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات بشرط أن تكون n في $\mathbb{N}$ أكبر أو يساوي رتبة معينة n_0 .

النهايات على الدوال

15

مثال:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n} = 2$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$

5. الرتابة و التقارب

مبرهنة:

1. إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فان هذه المتتالية متقاربة.
2. إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فان هذه المتتالية متقاربة.

ملاحظة : المبرهنة تثبت تقارب المتتالية و لا تعطي النهاية.

6. نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

لدينا : $u_n = u_0 q^n$

10 - إذا كان $q>1$ و $u_n>0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

و عليه (u_n) متباعدة .

- إذا كان $q>1$ و $u_n<0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

و عليه (u_n) متباعدة .

- إذا كان $-1<q<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

و عليه (u_n) متقاربة .

10 - إذا كان $q \le -1$ فإن النهاية غير موجودة و عليه (u_n) متباعدة .

أمثلة :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ غير موجودة ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

الطرائق

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n = \dfrac{3n^2-8n}{2n^2+5}$.

بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

الحل :

لاحظ $u_n = f(n)$ حيث f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ

$f(x) = \dfrac{3x^2-8x}{2x^2+5}$.

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

10 إذن المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 2.

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 20$ و أساسها $q = 2$

1- احسب حدها العام .

2- احسب المجاميع الآتية :

$s_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ؛ $s_2 = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

$$s_3 = u_{10} + u_{11} + ... + u_{20}$$

الحل :

1) الحد العام : $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_n = 20 \times 2^n$

2) حساب المجاميع :

* لدينا : $s_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ومنه : $s_1 = u_0 . \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 20 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

إذن : $s_1 = 20\left(2^{n+1} - 1\right)$

* لدينا : $s_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$

عدد الحدود هو :11

ومنه : $s_2 = u_0 . \dfrac{1-q^{11}}{1-q} = 20 \times \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 20\left(2^{11} - 1\right)$

* لدينا : $s_3 = u_{10} + u_{11} + ... + u_{20}$

عدد الحدود هو : $20 - 10 + 1 = 11$

و منه : $s_3 = u_{10} . \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ حيث : $u_{10} = 20 \times 2^{10}$

و عليه : $s_3 = 20 \times 2^{10} \times \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 20 \times 2^{10}\left(2^{11} - 1\right)$

التمرين الثالث :

10

(u_n) متتالية هندسية حيث : $u_s = 1000, u_1 = 250$ و أساسها q

حيث: $q > 0$.

(1 احسب q .

(2 احسب المجموع $S_n = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + ... + 2^{\frac{n}{2}}$.

(3 احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

(4 احسب بدلالة n الجداء :

$$p_n = \left(\sqrt{2}\right)^1 . \left(\sqrt{2}\right)^2 . \left(\sqrt{2}\right)^3 \times ... \times \left(\sqrt{2}\right)^n$$

الحل :

1- حساب q : لدينا $U_5 = U_1 \times q^4$

و منه : $q^4 = \dfrac{U_5}{U_1}$ أي : $q^4 = \dfrac{1000}{250}$

أي : $q^4=4$ و عليه : $q^2=2$ وبالتالي: $q=\sqrt{2}$.

2- حساب المجموع : $S_n=2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{2}{2}}+2^{\frac{3}{2}}+...+2^{\frac{n}{2}}$

و منه: $S_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$

إذن: S_n هي مجموع حدود المتتالية الهندسية السابقة حيث : $q=\sqrt{2}$

$$S_n=\sqrt{2}\times\frac{1-q^n}{1-q}=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}$$

$$S_n=\sqrt{2}\times\frac{\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^n\right]\left[1+\sqrt{2}\right]}{\left[1-\sqrt{2}\right]\left[1+\sqrt{2}\right]}$$

$$S_n=\sqrt{2}\times\frac{\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^n\right]^n\left[1+\sqrt{2}\right]}{1-2}=-\sqrt{2}\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^n\right]\left(1+\sqrt{2}\right)$$

3– حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-\sqrt{2}\left(1-\left(\sqrt{2}\right)^n\right)\right]\left(1+\sqrt{2}\right)=+\infty$$

لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n=+\infty$

التقويم		20

4 – حساب الجداء p_n :

$$p_n=\left(\sqrt{2}\right)^1\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\left(\sqrt{2}\right)^3\times...\times\left(\sqrt{2}\right)^n$$

$$p_n=\left(\sqrt{2}\right)^{1+2+3+...+n}=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{(1+n)n}{2}}$$

التمرين الرابع :

1) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=60$ و بالعلاقة التراجعية :

$$u_{n+1}-u_n=u_n\times 0,06\quad ,\quad n\geq 0$$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية

ب – احسب المجموع : $S_n=\sum_{i=0}^{n}u_i$

2) بلغ عدد سكان بلد 600 مليون نسمة يوم 1 جانفي سنة 2000 .

نفرض أن عدد سكان هذا البلد يزداد سنويا بنسبة قدرها 60%

كم سيصير عدد السكان في 1 جانفي سنة 2007 .

الحل :

I-1) إثبات أن (U_n) متتالية هندسية .

لدينا : $U_{n+1}-U_n=U_n\times 0,06$

و منه : $U_{n+1}=U_n+U_n\times 0,06$

$$U_{n+1}=U_n\left(1+0,06\right)$$

إذن : $U_{n+1}=1,06\times U_n$

و عليه : (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,06$.

2) حساب U_n بدلالة n :

لدينا : $U_n=U_0\times q^n$ و منه : $U_n=60.\left(1,06\right)^n$.

3) حساب المجموع :

لدينا : $S_n=U_0+U_1+...+U_n$

$$S_n=U_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=60\times\frac{1-\left(1,06\right)}{1-1,06}$$

$$S_n=60\times\frac{1-\left(1,06\right)^{n+1}}{0,06}=60\times\frac{1-\left(1,06\right)^{n+1}}{\frac{6}{100}}$$

$$S_n=\frac{6000}{6}\times\left[1-\left(1,06\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n=1000\times\left[1-\left(1,06\right)^{n+1}\right]$$

II - نفرض U_n عدد السكان في سنة n

وعليه U_{n+1} عدد السكان في السنة الموالية $n+1$

و عليه : $U_{n+1}=U_n+U_n\times\frac{6}{100}$

$$U_{n+1}=U_n+U_n\times 0,06$$

إذن: $U_{n+1}=1,06.U_n$ و هي نفس المتتالية السابقة .

و منه : $U_n=60\left(1,06\right)^n$ حيث : $U_0=60$

عدد السكان في السنة 2000 بالملايين .

فيكون عدد السكان في السنة2007 هو U_7

حيث: $U_7=60\left(1,06\right)^7$ و منه: $U_7\simeq 90,22$.

إذن عدد السكان في السنة 2007 هو حوالي 90,22 مليون نسمة .

	تمرين رقم 22ص23 تمرين رقم 27 ص24 تمرين رقم 28 ص24	

بطاقة رقم 03: **الاستدلال بالتراجع** المدة اللازمة لدرس: 03

المهــارة	الـــــدرس: **الاستدلال بالتراجع**	الزمن
	## 1. الاستدلال بالتراجع : **تعريف :** لتكن $p(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n . نقول عن الخاصية $p(n)$ أنها صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n \geq n_0$ إذا تحقق ما يلي : 1) $p(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$. 2) نبرهن أن $p(n)$ وراثية أي نبرهن أنه إذا كانت $p(k)$ صحيحة فإن $p(k+1)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي كيفي . أو بعبارة أخرى : 1) نعوض n بأصغر قيمة تأخذها في $\mathbb{N}$ لنتأكد من صحة الخاصية. 2) نفرض صحة $p(k)$ ثم نبرهن صحة $p(k+1)$. **مثال1 :** برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ **الحل :** - من أجل $n=0$ لدينا : $0=0$ و منه $p(0)$ صحيحة . - نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$ الفرضية : $p(k):\ 1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ المطلوب :	30 15

15 $p(k+1):\ 1+2+3+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

لدينا:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

و منه : $p(k+1)$ صحيحة .

إذن : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

مثال 2:

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

الحل :

نفرض : $p(0):1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

60 1) نتأكد من صحة $p(0)$: لدينا : $0^3=\dfrac{1}{n}(0)^2(0+1)^2$

أي أن $0=0$ و منه : $p(0)$ صحيحة .

2) نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k):\ 1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$$p(k+1):\ 1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

الطرائق

التمرين الأول :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن :

$$1-3+5-7+...+(-1)^{n-1}.(2n-1)=n(-1)^{n-1}$$

الحل:

البرهان بالتراجع على صحة $p(n)$:

$$1-3+5-7+...+(-1)^{n}.(2n-1)=n(-1)^{n-1}$$

- التأكد من صحة $p(1)$: $1=1(-1)^{0}=1$

و منه $p(1)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k):\ 1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}(2k-1)=k(-1)^{k-1}$$

$$p(k+1):\ 1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}(2k-1)$$
$$+(-1)^{k}.(2k+1)=(k+1)(-1)^{k}$$

$$1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}.(2k-1)+(-1)^{k}.(2k+1)$$
$$=k(-1)^{k-1}+(-1)^{k}(2k+1)$$
$$=k(-1)^{k-1}+(-1)^{k-1}\times(-1)(2k+1)$$
$$=(-1)^{k-1}[k-2k-1]\ =(-1)^{k-1}(-k-1)$$
$$=-(-1)^{k-1}(k+1)\ =(-1)^{k}(k+1)$$

و منه $p(k+1)$ صحيحة .

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين الثاني :

نعرف المتتالية (u_n) بالعبارة $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ و $u_0=10$

1 – مثل بيانيا المتتالية (u_n) . ماذا تلاحظ ؟

2 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد n فإن : $u_n\geq 1$.

3- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

4 – بين أن المتتالية متقاربة .

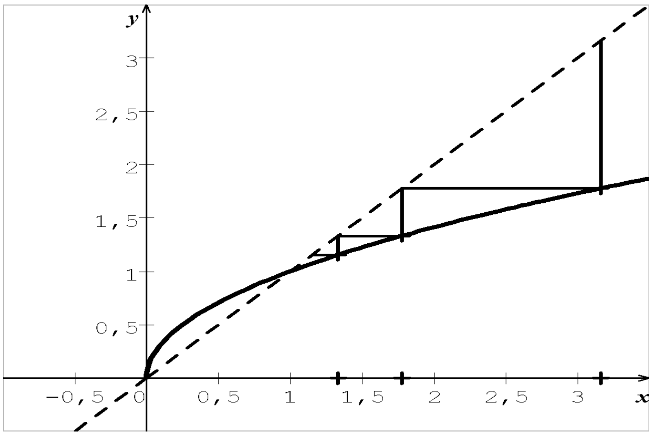
5 – احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التقويم

الحل:

60

التمثيل البياني :



الملاحظة : حدود المتتالية تقترب من العدد 1 .

2) البرهان بالتراجع على صحة $p(n):\ U_n \geq 1$

- التأكد من صحة $p(0): U_0 \geq 1$ و هي صحيحة لأن : $U_0 = 10$

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن $p(k+1)$

الفرضية : $p(k):\ \ U_k \geq 1$

المطلوب : $p(k+1):\ U_{k+1} \geq 1$

لدينا : $U_k \geq 1$ و منه : $\sqrt{U_k} \geq 1$

و عليه : $U_{k+1} \geq 1$ و منه : $p(k+1)$ صحيحة .

3- نبين أن (U_n) متناقصة :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n = \frac{\left(\sqrt{U_n} - U_n\right)\left(\sqrt{U_n} + U_n\right)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

$$= \frac{U_n - U_n{}^2}{\sqrt{U_n} + U_n} = \frac{U_n\left(1 - U_n\right)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

و بما أن: $U_n \geq 1$ فإن : $1 - U_n \leq 0$ و $U_n > 0$ و $\sqrt{U_n} > 0$ و منه :

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ إذن : (U_n) متناقصة .

4 – نبين أن (U_n) متقاربة .

بما أن المتتالية (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد 1

$(U_n > 1)$ فإن (U_n) متقاربة .

5- حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

لما $n \to +\infty : n+1 \to +\infty$ و منه : نفرض $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

فيكون $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$ فتكون : $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{U_n}$

و عليه : $\ell = \sqrt{\ell}$ و منه : $\ell^2 = \ell$ أي $\ell^2 - \ell = 0$

و عليه : $\ell(\ell-1) = 0$ أما : $\ell = 0$) مرفوض لأن $U_n \geq 1$ (

أو : $\ell = 1$ و عليه: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

تمرين رقم 68ص27
تمرين رقم 73 ص28
تمرين رقم 75 ص28

بطاقة رقم 04: دراسة المتتاليات من الشكل $(a \neq 0) u_{n+1} = au_n + b$ المدة اللازمة لدرس : 03 ساعات

المهـــارة	الــــــدرس: دراسة المتتاليات من الشكل $(a \neq 0) u_{n+1} = au_n + b$	الزمن
	حل النشاط رقم 04 ص 07 دراسة المتتاليات من الشكل $(a \neq 0) u_{n+1} = au_n + b$ (U_n) متتالية حدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a \neq 0$ نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة التآلفية : $x \to ax + b$. **1. الحالة الأولى $a = 1$** بما أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = b$	20 60

فان المتتالية (U_n) حسابية أساسها b.
وبالتالي :

- إذا كان $b<0$ فان (U_n) متناقصة.
- إذا كان $b>0$ فان (U_n) متزايدة.
- إذا كان $b=0$ فان (U_n) ثابتة.

ولدينا عندئذ :
من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n=u_0+bn$ وبالتالي :

- اذا كان $b<0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$
- اذا كان $b>0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2. الحالة الثانية $a\neq 1$

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.
لدينا من اجل عدد طبيعي n،
$u_{n+1}-u_n=(au_n+b)-(au_{n-1}+b)$ أي $u_{n+1}-u_n=a(u_n-u_{n-1})$
نواصل بنفس الكيفية لنحصل هكذا على التوالي على المساويات التالية :

$$u_{n+1}-u_n=a(u_n-u_{n-1})$$
$$u_n-u_{n-1}=a(u_{n-1}-u_{n-2})$$
$$u_{n-1}-u_{n-2}=a(u_{n-2}-u_{n-3})$$

....

$$u_3-u_2=a(u_2-u_1)$$
$$u_2-u_1=a(u_1-u_0)$$

بالضرب طرفا إلى طرف وبعد عملية الاختزال نحصل على :

$$u_{n+1}-u_n=a^n(u_1-u_0)$$

- ❖ إذا كان $a>0$ أي إذا كانت الدالة f متزايدة تماما تكون المتتالية (u_n) رتيبة وإشارة الفرق u_1-u_0 التي تحدد ما إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

- ❖ إذا كان $a<0$ أي إذا كانت الدالة f متناقصة فان a^n لايحتفظ بإشارة ثابتة رتيبة وإشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ لايحتفظ بإشارة ثابتة نستنتج في هذه الحالة أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

نتيجة :

اذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ وكانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) رتيبة وإشارة u_1-u_0 هي التي تحدد إذا كانت (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

❖ لدراسة تقارب (u_n) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بحدها العام :

$$v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$$

ولدينا :
من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+b-\frac{b}{1-a}=a\left(u_n-\frac{b}{1-a}\right)=av_n$$

وبالتالي المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول v_0.
أي أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

45

$$v_n=v_0\times a^n$$

وبما أن:

$$v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$$

فان:

$$v_n=v_0\times a^n-\frac{b}{1-a}$$

وبالتالي:

❖ إذا كان $-1<a<1$ فان $\lim_{n\to+\infty} a^n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{b}{1-a}$ وبالتالي : نستنتج أن المتتالية متقاربة نحو $\frac{b}{1-a}$.

❖ إذا كان $a>1$ فان $\lim_{n\to+\infty} a^n=+\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ وذلك حسب إشارة v_0.

❖ إذا كان $a\le -1$ فانه ليس للمتتالية (a^n) نهاية ومنه ليس للمتتالية (u_n) نهاية .

نستنتج انه في الحالتين $a>1$ و $a\le -1$ المتتالية ليست متقاربة.

الطرائق

التمرين الأول :

α عدد حقيقي غير معدوم .

نعرف المتتالية (u_n) بحدها الأول u_0 و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \alpha u_n + 3$ من أجل $n \in \mathbb{N}$

1 – عين القيمة α_0 للعدد α بحيث تكون (u_n) متتالية حسابية أساسها غير معدوم .

2 – نفرض $\alpha \neq \alpha_0$. كيف يمكن اختيار u_0 بحيث تكون (u_n) ثابتة .

3 – نفرض أن (u_n) ليست حسابية و لا ثابتة و نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $V_n = \beta u_n + \delta \ , \ n \geq 0$

حيث β و δ عددان حقيقيان غير معدومين .

- بين أن المتتالية (v_n) تكون هندسية في حالة كون أساسها q مساويا إلى α. ثم استنتج δ بدلالة α و β
- كيف يمكن اختيار α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية متقاربة .
- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

55 التقويم

الحل :

-1 تعيين α_0 : تكون (U_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كانت :

$U_{n+1} - U_n = r$

و منه : $U_{n+1} - U_n = \alpha U_n + 3 - U_n \ = U_n(\alpha - 1) + 3$

إذن : $\alpha - 1 = 0$ و بالتالي : $\alpha = 1$

و بالتالي: $U_{n+1} - U_n = 3$ من أجل: $\alpha = 1$.

و بالتالي (U_n) متتالية حسابية أساسها 3 من أجل: $\alpha = 1$.

2 – لدينا : $\alpha \neq 1$

تكون (U_n) ثابتة إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = U_n$

و منه: $\alpha U_n + 3 = U_n$ و عليه: $(\alpha - 1)U_n = -3$

إذن: $U_n = \dfrac{-3}{\alpha - 1}$ و بما أن (U_n) ثابتة فإن : $U_0 = U_n$

و منه: $U_0 = \frac{-3}{\alpha - 1}$.

3 – تبيان أن $q = \alpha$:

$$V_{n+1} = \beta U_{n+1} + \delta \quad = \beta\left(\alpha U_n + 3\right) + \delta$$

$$= \alpha\beta U_n + 3\beta + \delta$$

$$= \alpha\beta U_n + \alpha\delta - \alpha\delta + 3\beta + \delta$$

$$= \alpha\left(\beta U_n + \delta\right) - \alpha\delta + 3\beta + \delta$$

$$= \alpha V_n - \alpha\delta + 3\beta + \delta$$

و عليه : $-\alpha\delta + 3\beta + \delta = 0$ إذن : $\delta\left(1-\alpha\right) = -3\beta$

أي: $\delta = \frac{-3\beta}{1-\alpha}$ إذن : $q = \alpha$ و $\delta = \frac{-\beta}{1-\alpha}$

1. تكون $\left(V_n\right)$ متقاربة لما $-1 < q < 1$ و عليه : $-1 < \alpha < 1$

- حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

لدينا : $V_n = \beta U_n + \delta$ و منه : $U_n = \frac{1}{\beta}\left(V_n - \delta\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta}\left(V_n - \delta\right) = \frac{-\delta}{\beta}$$

تمرين رقم 81ص28

تمرين رقم 82 ص29

تمرين رقم 83 ص29

المهــارة	الـــــــدرس: أعمال موجهة	الزمن

أعمال موجهة

التمرين الأول :

(u_n) متتالية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases} \quad , \; n \geq 0$$

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2-u_n \geq 0$
- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن $u_n \geq 0$

- برهن أن (u_n) متزايدة
- استنتج أن (u_n) متقاربة

الحل :

1 – البرهان بالتراجع على صحة الخاصية $2-U_n \geq 0 : p(n)$

- من أجل $n=0$: $2-U_0 \geq 0$ أي: $4 \geq 0$ محققة .

و منه : $p(0)$ محققة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$:

الفرضية : $p(k): \quad 2-U_k \geq 0$

المطلوب : $p(k+1): \quad 2-U_{k+1} \geq 0$

لدينا : $2-U_k \geq 0$ و منه : $U_k \leq 2$

و عليه : $2+U_k \leq 4$ و منه : $\sqrt{2+U_k} \leq 2$

إذن : $U_{k+1} \leq 2$ و عليه : $2-U_{k+1} \geq 0$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة .

و منه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2. نبرهن بالتراجع أن : $U_n \geq 0$

لتكن الخاصية $p(n): \quad U_n \geq 0$

من أجل $n=1$: $U_1 \geq 0$

و لدينا : $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2-2} = 0$ و منه: $p(1)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية $p(k)$ و نبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$

الفرضية : $p(k): \; U_k \geq 0$

المطلوب : $p(k+1): \; U_{k+1} \geq 0$

لدينا : $U_k \geq 0$ و منه : $U_k + 2 \geq 0$

و عليه : $\sqrt{U_k+2} \geq 0$ وبالتالي : $U_{k+1} \geq 0$.

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

2 – نبرهن أن (U_n) متزايدة :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n = \frac{\left[\sqrt{2+U_n} - U_n\right]\sqrt{2+U_n} + U_n}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2+U_n - U^2{}_n}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

ندرس الإشارة : $-U_n^2 + U_n + 2$

لدينا : $\Delta = 9$ و منه : $U_n = 2$ أو $U_n = -1$ إذن :

$$-U_n^2 + U_n + 2 = -(U_n - 2)(U_n + 1) = (2 - U_n)(U_n + 1)$$

و منه :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(2-U_n)(U_n+1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

و بما أن: $2 - U_n \geq 0$ و $U_n \geq 0$ فإن: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

إذن : (U_n) متزايدة .

3 – استنتاج تقارب (U_n) :

لدينا : $2 - U_n \geq 0$ و منه : $U_n \leq 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى و متزايدة وعليه فهي متقاربة

التمرين الثاني :

تمرين رقم 38 صفحة 24

التمرين الثالث:

تمرين رقم 39 صفحة 24

التمرين الرابع:

تمرين رقم 40 صفحة 25

التمرين الخامس:

تمرين رقم 41 صفحة 25

التمرين السادس:

تمرين رقم 44 صفحة 25

التمرين السابع:

1) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 60$ و بالعلاقة التراجعية :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \times 0,06 \quad , \quad n \geq 0$$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية

ب – احسب المجموع : $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

2) بلغ عدد سكان بلد 600 مليون نسمة يوم 1 جانفي سنة 2000 .

نفرض أن عدد سكان هذا البلد يزداد سنويا بنسبة قدرها 60%

كم سيصير عدد السكان في 1 جانفي سنة 2007 .

الحل :

1-I) إثبات أن (U_n) متتالية هندسية .

لدينا : $U_{n+1} - U_n = U_n \times 0,06$

و منه : $U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,06$

$$U_{n+1} = U_n(1 + 0,06)$$

إذن : $U_{n+1} = 1,06 \times U_n$

و عليه : (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,06$.

2) حساب U_n بدلالة n :

لدينا : $U_n = U_0 \times q^n$ و منه : $U_n = 60.(1,06)^n$.

3) حساب المجموع :

لدينا : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 60 \times \frac{1 - (1,06)}{1 - 1,06}$$

$$S_n = 60 \times \frac{1-(1,06)^{n+1}}{0,06} = 60 \times \frac{1-(1,06)^{n+1}}{\frac{6}{100}}$$

$$S_n = \frac{6000}{6} \times \left[1-(1,06)^{n+1}\right]$$

$$S_n = 1000 \times \left[1-(1,06)^{n+1}\right]$$

II - نفرض U_n عدد السكان في سنة n

وعليه U_{n+1} عدد السكان في السنة الموالية $n+1$

و عليه : $U_{n+1} = U_n + U_n \times \frac{6}{100}$

$$U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,06$$

إذن: $U_{n+1} = 1,06.U_n$ و هي نفس المتتالية السابقة .

و منه : $U_n = 60(1,06)^n$ حيث : $U_0 = 60$

عدد السكان في السنة 2000 بالملايين .

فيكون عدد السكان في السنة2007 هو U_7

حيث: $U_7 = 60(1,06)^7$ و منه: $U_7 \simeq 90,22$.

إذن عدد السكان في السنة 2007 هو حوالي 90,22 مليون نسمة .