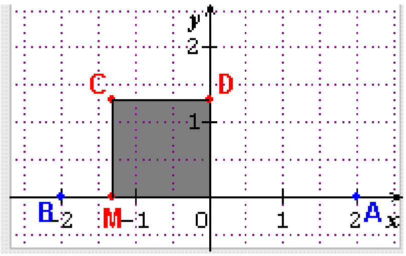
I) الدالة مربع

نشاط :



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

$A(2\,;\,0)$ نقطة من المستوي و B نظيرتها بالنسبة إلى المبدأ O ،

M نقطة متحركة على القطعة المستقيمة $[AB]$ فاصلتها x .

نعتبر النقطتين $C(x\,;\,|x|)$ و $D(0\,;\,|x|)$

لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد x مساحة الرباعي $OMCD$.

1) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟ استنتج D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) تحقق من أن الرباعي $OMCD$ مربع ، وأعط العبارة $f(x)$.

3) بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من المجال $[0\,;\,2]$، الصورتان $f(x_1)$ و $f(x_2)$ تحافظان على نفس ترتيب العددين x_1 و x_2 . هل هو كذلك في المجال $[-2\,;\,0]$ استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس شفعية الدالة f .

5) أنشئ المنحني الممثل للدالة f في المعلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

حل النشاط

1) لدينا $M \in [AB]$ معناه أن $x \in [-2\,;\,2]$ وبالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = [-2\,;\,2]$

2) لدينا $OM = MC = CD = OD = |x|$ وبما أن المعلم متعامد فإن الرباعي $OMCD$ مربع

لدينا : $s(OMCD) = |x|^2 = x^2$ ومنه : $f : x \mapsto x^2$ أي : $f(x) = x^2$

3) لدينا من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[0\,;\,2]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 > x_2^2$ ومعناه أن $f(x_1) > f(x_2)$

و لدينا من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[-2\,;\,0]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 < x_2^2$ ومعناه أن $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\,;\,2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-2\,;\,0]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		0		2
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

4) لدينا من أجل كل $x \in [-2\,;\,2]$ فإن $-x \in [-2\,;\,2]$

لأن المجال مركزي مركزه 0

و $(-x)^2 = x^2$ معناه أن : $f(-x) = f(x)$

وبالتالي : الدالة f زوجية

وبما أن المعلم متعامد فإن منحنيها يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

5) إنشاء المنحني :

التعريف : الدالة مربع هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 .

ونكتب $f : x \mapsto x^2$ أو $f(x) = x^2$

ملاحظات :

- مجموعة تعريف الدالة مربع هي $\mathbb{R}$
- من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$
- الدالة مربع تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $\mathbb{R}$ وهي : $f(0) = 0$

مبرهنة : الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$

خاصية : الدالة مربع المعرفة على كل جزء من $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، هي دالة **زوجية** ومنحنيها الممثل في معلم **متعامد** $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ يكون **متناظرا** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.

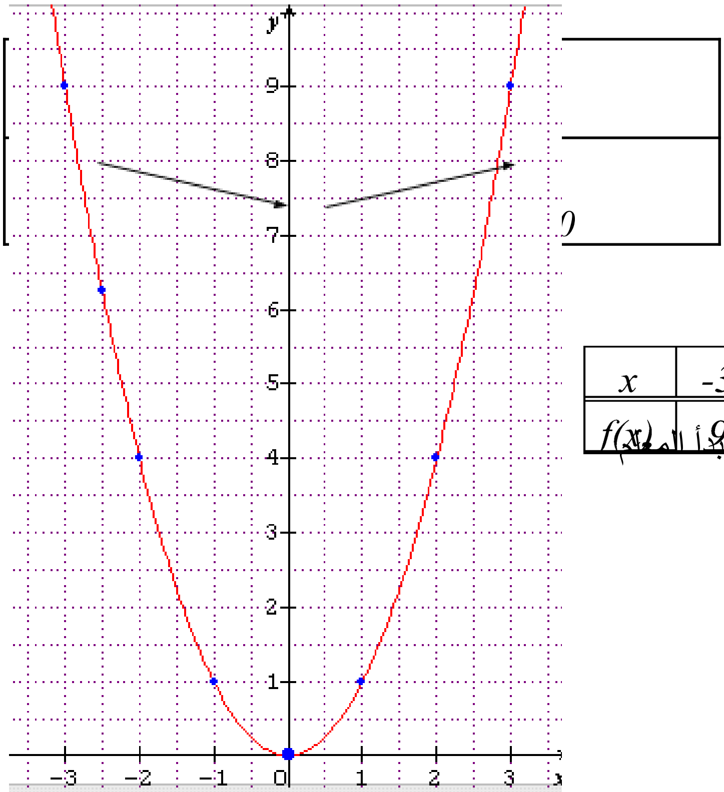
دراسة $f(x)$ من أجل القيم الكبيرة للعدد x :

x	10	10^2	10^4	10^{14}
f(x)	10^2	10^4	10^8	10^{28}

نلاحظ أنه كلما كبرت قيم x فإن قيم $f(x)$ تكبر كذلك ونقول عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

وبالتناظر لدينا عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

جدول تغيرات الدالة مربع :



التمثيل البياني للدالة مربع :

جدول بعض النقط المساعدة:

x	-3	-2.5	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6.25	1	0	1	4	9

منحني الدالة مربع يسمى قطعا مكافئا ذروته النقطة O مبدأ المعلم.

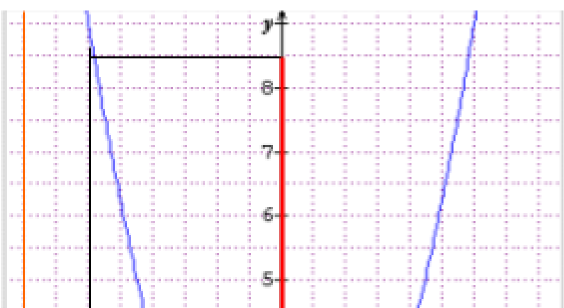
تمرين 12 صفحة 107:

جد حصرا للعدد x^2 في كل حالة من الحالات الآتية :

$x \in [-3 ; 1[$ ، $x \in [-0,3 ; 0,1[$ ، $x \in [-0,2 ; 0,1]$ ، $x \in]-4 ; -2[$

حالات إضافية : $x \in [-1 ; 3[$ ، $x \in]-1 ; 3[$ ، $x \in]-2 ; 2[$

الحل :



$x \in [-3 ; 1[$ معناه $x^2 \in [0 ; 9]$

$x \in [-0,3 ; 0,1[$ معناه $x^2 \in [0 ; 0,09]$

$x \in [-0,2 ; 0,1]$ معناه $x^2 \in [0 ; 0,04]$

$x \in]-4 ; -2[$ معناه $x^2 \in]4 ; 16[$

الحالات الإضافية :

$x \in [-1 ; 3[$ معناه $x^2 \in [0 ; 9[$

$x \in]-1 ; 3[$ معناه $x^2 \in [0 ; 9[$

$x \in]-2 ; 2[$ معناه $x^2 \in [0 ; 4[$

تمرين 13 صفحة 107

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-10 ; 7]$ بـ : $f(x) = x^2 - 10$

عين جدول تغيراتها و مثلها بيانيا.

الحل :

الدالة مربع ($g : x \mapsto x^2$) متناقصة تماما على المجال $[-10 ; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0 ; 7]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[-10 ; 0]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 < x_2^2$ و معناه $x_1^2 - 10 < x_2^2 - 10$

ومعناه $f(x_1) < f(x_2)$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-10 ; 0]$

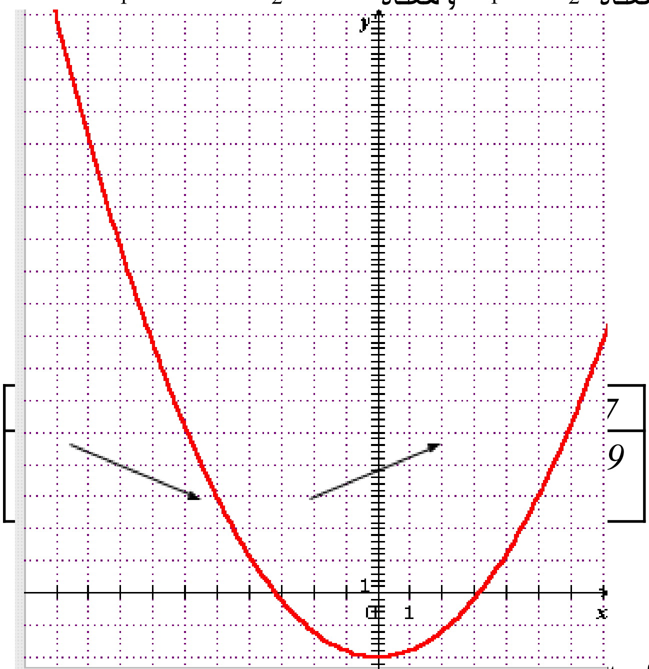
و من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[0 ; 7]$:

$x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 > x_2^2$ ومعناه $x_1^2 - 10 > x_2^2 - 10$

ومعناه $f(x_1) > f(x_2)$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0 ; 7]$

جدول تغيرات الدالة f :



التمثيل البياني :

أخذنا : $\|\vec{i}\| = 0,5cm$ و $\|\vec{i}\| = 0,01cm$

تمرين 14 صفحة 107

عين إتجاه تغير كل دالة من الدوال الاتية :

1) الدالة f المعرفة على $[2 ; 3]$ بالعبارة : $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

2) الدالة g المعرفة على $]-\infty ; -1]$ بالعبارة : $g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

3) الدالة h المعرفة على $]-\infty ; -1]$ بالعبارة : $h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

الحل :

1) الدالة f المعرفة على $[2 ; 3]$ بالعبارة : $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

الدالة التآلفية $x \mapsto x - 3$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $[2 ; 3]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[3 ; 2]$: إذا كان $x_1 > x_2$ فإن $0 > x_1 - 3 > x_2 - 3$

ومنه : $(x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2$ ومنه : $4(x_1 - 3)^2 < 4(x_2 - 3)^2$

إذن : $4(x_1 - 3)^2 + 1 < 4(x_2 - 3)^2 + 1$ وبالتالي : $f(x_1) < f(x_2)$ أي f متناقصة تماما على $[3 ; 2]$

جدول تغيرات الدالة f :

x.	2	3
(f(x.	5 ↘	1

2) الدالة g المعرفة على $]-\infty ; -1]$ بالعبارة : $g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

الدالة التآلفية $x \mapsto x+1$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $]-\infty ; -1]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $]-\infty ; -1]$: $x_1 < x_2$ فإن $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$

ومنه : $(x_1 + 1)^2 > (x_2 + 1)^2$ ومنه: $-2(x_1 + 1)^2 < -2(x_2 + 1)^2$ إذن :

$-2(x_1 + 1)^2 + 7 < -2(x_2 + 1)^2 + 7$ أي : $g(x_1) < g(x_2)$ ومنه g متزايدة تماما على $]-\infty ; -1]$

جدول تغيرات الدالة g :

x.	$-\infty$	-1
(g(x.	$-\infty$ ↗	7

3) الدالة h المعرفة على $]-\infty ; -1]$ بالعبارة : $h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

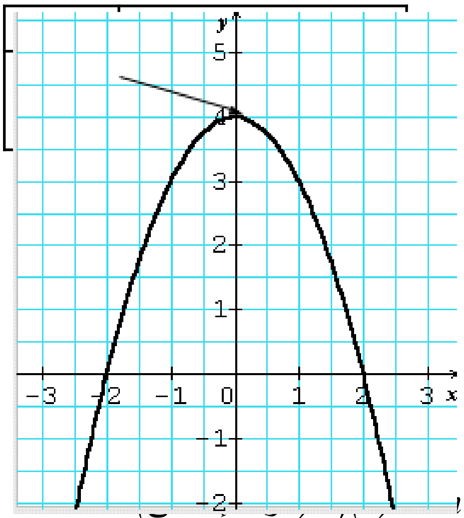
الدالة التآلفية $x \mapsto x+1$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $]-\infty ; -1]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $]-\infty ; -1]$: $x_1 < x_2$ فإن $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$

ومنه : $(x_1 + 1)^2 > (x_2 + 1)^2$ ومنه: $3(x_1 + 1)^2 > 3(x_2 + 1)^2$ إذن :

$3(x_1 + 1)^2 - 7 > 3(x_2 + 1)^2 - 7$ أي : $h(x_1) > h(x_2)$ ومنه h متناقصة تماما على $]-\infty ; -1]$

جدول تغيرات الدالة h :



تمرين 9 صفحة 106

إليك التمثيل البياني لدالة f من الشكل $x \mapsto ax^2 + b$.

استعمل هذا الشكل :

1- لتعيين $f(-2)$ ، $f(1)$ ، $f(0)$.

2- لتشكيل جدول تغيرات الدالة f .

3- لتعيين إشارة وعدد حلول المعادلة $f(x) = 1$.

4- لحل المعادلة $f(x) = 5$.

5- حل وناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

الحل :

1- تعيين $f(-2)$ ، $f(1)$ ، $f(0)$.

$f(0) = 4$ ، $f(1) = 3$ ، $f(-2) = 0$.

2- تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	-2 ↗	4 ↘	-2

3- تعيين إشارة وعدد حلول المعادلة $f(x) = 1$.

المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

4- حل المعادلة $f(x) = 5$.

المعادلة $f(x) = 5$ لا تقبل حلول أي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$

5- حل وناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

إذا كان $m \in]-\infty ; -2[$ فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $S = \emptyset$

إذا كان $m \in [-2 ; 4[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

إذا كان $m = 4$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما.

إذا كان $m \in]4 ; +\infty[$ فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $S = \emptyset$.