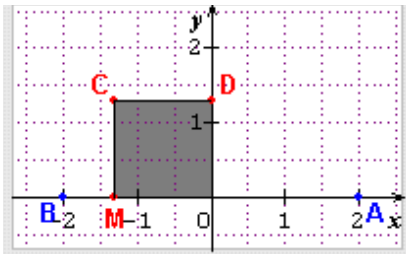
I) الدالة مربع

نشاط :



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
$A(2\ ;\ 0)$ نقطة من المستوي و B نظيرتها بالنسبة إلى المبدأ O ،
M نقطة متحركة على القطعة المستقيمة $[AB]$ فاصلتها x .
نعتبر النقطتين $C(x\ ;\ |x|)$ و $D(0\ ;\ |x|)$
لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد x مساحة الرباعي $OMCD$.

1) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟ استنتج D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2) تحقق من أن الرباعي $OMCD$ مربع ، وأعط العبارة $f(x)$.
3) بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من المجال $[0\ ;\ 2]$، الصورتان $f(x_1)$ و $f(x_2)$ تحافظان على نفس ترتيب العددين x_1 و x_2 . هل هو كذلك في المجال $[-2\ ;\ 0]$ استنتج جدول تغيرات الدالة f .
4) أدرس شفعية الدالة f .
5) أنشئ المنحني الممثل للدالة f في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

حل النشاط

1) لدينا $M \in [AB]$ معناه أن $x \in [-2\ ;\ 2]$ وبالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = [-2\ ;\ 2]$
2) لدينا $OM = MC = CD = OD = |x|$ وبما أن المعلم متعامد فإن الرباعي $OMCD$ مربع
لدينا : $s(OMCD) = |x|^2 = x^2$ ومنه : $f : x \mapsto x^2$ أي : $f(x) = x^2$
3) لدينا من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[0\ ;\ 2]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 > x_2^2$ ومعناه أن $f(x_1) > f(x_2)$

و لدينا من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[-2\ ;\ 0]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 < x_2^2$ ومعناه أن $f(x_1) < f(x_2)$
ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-2\ ;\ 0]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		0		2
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

4) لدينا من أجل كل $x \in [-2\ ;\ 2]$ فإن $-x \in [-2\ ;\ 2]$
لأن المجال مركزي مركزه 0
و $(-x)^2 = x^2$ معناه أن : $f(-x) = f(x)$
وبالتالي : الدالة f زوجية

وبما أن المعلم متعامد فإن منحنيها يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

5) إنشاء المنحني :

التعريف : الدالة مربع هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 .

ونكتب $f : x \to x^2$ أو $f(x) = x^2$

ملاحظات :

- مجموعة تعريف الدالة مربع هي $\mathbb{R}$
- من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$
- الدالة مربع تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $\mathbb{R}$ وهي : $f(0) = 0$

مبرهنة : الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$

خاصية : الدالة مربع المعرفة على كل جزء من $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، هي دالة **زوجية** ومنحنيها الممثل في معلم متعامد $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ يكون **متناظرا** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.

دراسة $f(x)$ من أجل القيم الكبيرة للعدد x :

x	10	10^2	10^4	10^{14}
$f(x)$	10^2	10^4	10^8	10^{28}

نلاحظ أنه كلما كبرت قيم x فإن قيم $f(x)$ تكبر كذلك ونقول عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

وبالتناظر لدينا عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$

جدول تغيرات الدالة مربع :

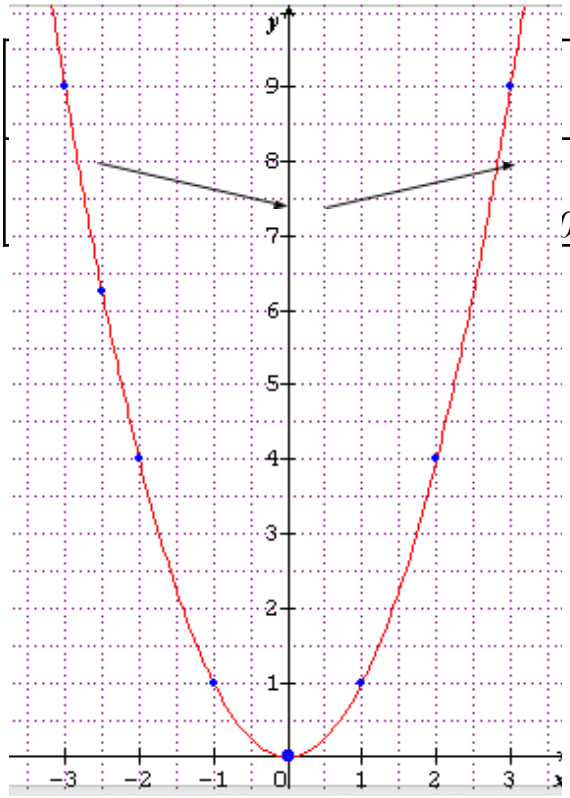
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

التمثيل البياني للدالة مربع :

جدول بعض النقط المساعدة:

x	-3	-2.5	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6.25	1	0	1	4	9

منحنى الدالة مربع يسمى قطعا مكافئا رأسه النقطة O مبدأ المعلم



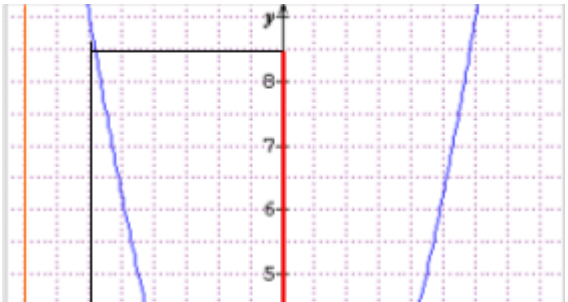
تمرين 12 صفحة 107:

جد حصرا للعدد x^2 في كل حالة من الحالات الآتية :

$x \in [-3 ; 1[$ ، $x \in [-0,3 ; 0,1[$ ، $x \in [-0,2 ; 0,1]$ ، $x \in]-4 ; -2[$

حالات إضافية : $x \in [-1 ; 3[$ ، $x \in]-1 ; 3[$ ، $x \in]-2 ; 2[$

الحل :



$x^2 \in [0\ ;\ 9]$ معناه $x \in [-3\ ;\ 1[$

$x^2 \in [0\ ;\ 0{,}09]$ معناه $x \in [-0{,}3\ ;\ 0{,}1[$

$x^2 \in [0\ ;\ 0{,}04]$ معناه $x \in [-0{,}2\ ;\ 0{,}1]$

$x^2 \in]4\ ;\ 16[$ معناه $x \in]-4\ ;\ -2[$

الحالات الإضافية :

$x^2 \in [0\ ;\ 9[$ معناه $x \in [-1\ ;\ 3[$

$x^2 \in [0\ ;\ 9[$ معناه $x \in]-1\ ;\ 3[$

$x^2 \in [0\ ;\ 4[$ معناه $x \in]-2\ ;\ 2[$

تمرين 13 صفحة 107

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-10\ ;\ 7]$ بـ : $f(x) = x^2 - 10$

عين جدول تغيراتها ومثلها بيانيا.

الحل :

الدالة مربع ($g : x \mapsto x^2$) متناقصة تماما على المجال $[-10\ ;\ 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ 7]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[-10\ ;\ 0]$: $x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 < x_2^2$ ومعناه $x_1^2 - 10 < x_2^2 - 10$

ومعناه $f(x_1) < f(x_2)$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-10\ ;\ 0]$

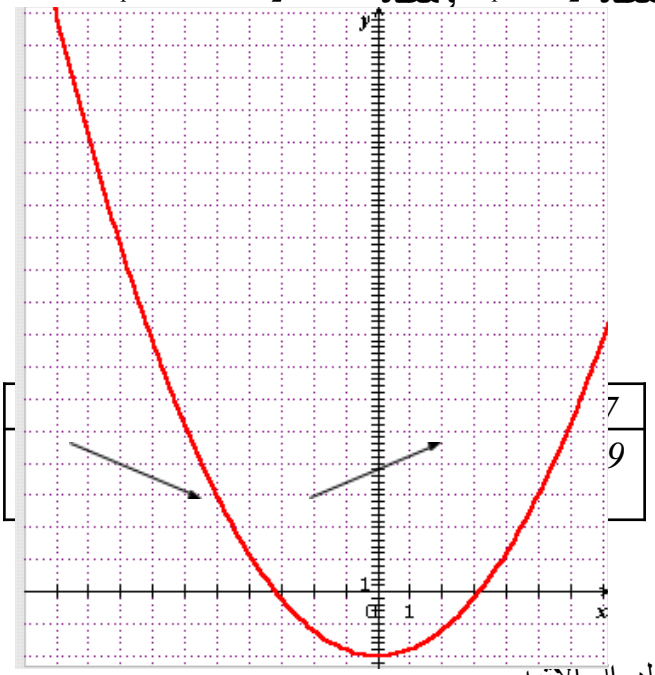
و من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[0\ ;\ 7]$:

$x_1 > x_2$ معناه $x_1^2 > x_2^2$ ومعناه $x_1^2 - 10 > x_2^2 - 10$

ومعناه $f(x_1) > f(x_2)$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ 7]$

جدول تغيرات الدالة f :



التمثيل البياني :

أخذنا : $\|\vec{i}\| = 0{,}5cm$ و $\|\vec{i}\| = 0{,}01cm$

تمرين 14 صفحة 107

عين إتجاه تغير كل دالة من الدوال الآتيه :

1) الدالة f المعرفة على $[2\ ;\ 3]$ بالعبارة : $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

2) الدالة g المعرفة على $]-\infty\ ;\ -1]$ بالعبارة : $g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

3) الدالة h المعرفة على $]-\infty\ ;\ -1]$ بالعبارة : $h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

الحل :

1) الدالة f المعرفة على $[2\ ;\ 3]$ بالعبارة : $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

الدالة التآلفية $x \mapsto x - 3$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $[2\ ;\ 3]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $[2\ ;\ 3]$: إذا كان $x_1 > x_2$ فإن $3 - > x_2 - 3 > x_1 - 0$

ومنه : $(x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2$ ومنه : $4(x_1 - 3)^2 < 4(x_2 - 3)^2$

إذن : $4(x_1 - 3)^2 + 1 < 4(x_2 - 3)^2 + 1$ وبالتالي : $f(x_1) < f(x_2)$ أي f متناقصة تماما على $[2\ ;\ 3]$

جدول تغيرات الدالة f :

x.	2	3
$f(x)$.	5	1

2) الدالة g المعرفة على $]-\infty\ ;\ -1]$ بالعبارة : $g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

الدالة التآلفية $x \mapsto x+1$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $]-\infty\ ;\ -1]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $]-\infty\ ;\ -1]$: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$

ومنه : $(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$ ومنه: $-2(x_1+1)^2 < -2(x_2+1)^2$ إذن :

$-2(x_1+1)^2 + 7 < -2(x_2+1)^2 + 7$ أي : $g(x_1) < g(x_2)$ ومنه g متزايدة تماما على $]-\infty\ ;\ -1]$

جدول تغيرات الدالة g :

x.	$-\infty$	-1
$g(x)$.	$-\infty$	7

3) الدالة h المعرفة على $]-\infty\ ;\ -1]$ بالعبارة : $h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

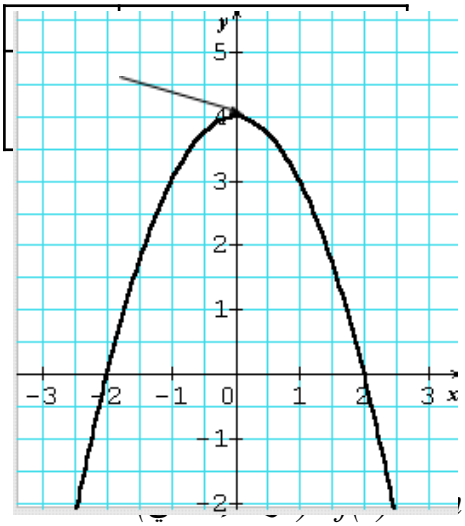
الدالة التآلفية $x \mapsto x+1$ متزايدة تماما وسالبة على المجال $]-\infty\ ;\ -1]$

إذن من أجل كل x_1 و x_2 من المجال $]-\infty\ ;\ -1]$: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$

ومنه : $(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$ ومنه: $3(x_1+1)^2 > 3(x_2+1)^2$ إذن :

$3(x_1+1)^2 - 7 > 3(x_2+1)^2 - 7$ أي : $h(x_1) > h(x_2)$ ومنه h متناقصة تماما على $]-\infty\ ;\ -1]$

جدول تغيرات الدالة h :



تمرين 9 صفحة 106

إليك التمثيل البياني لدالة f من الشكل $x \mapsto ax^2 + b$.

استعمل هذا الشكل :

1- لتعيين $f(-2)$ ، $f(1)$ ، $f(0)$.

2- لتشكيل جدول تغيرات الدالة f .

3- لتعيين إشارة وعدد حلول المعادلة $f(x) = 1$.

4- لحل المعادلة $f(x) = 5$.

5- حل وناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

الحل :

1- تعيين $f(-2)$ ، $f(1)$ ، $f(0)$.

$f(-2) = 0$ ، $f(1) = 3$ ، $f(0) = 4$.

2- تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

$x.$	$-\frac{5}{2}$ 0 $\frac{5}{2}$
$(f(x.$	-2 ↗ 4 ↘ -2

3- تعيين إشارة وعدد حلول المعادلة $f(x) = 1$.

المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

4- حل المعادلة $f(x) = 5$.

المعادلة $f(x) = 5$ لا تقبل حلول أي مجموعة حلولها هي $s = \varnothing$

5- حل وناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

إذا كان $m \in]-\infty ; -2[$ فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $s = \varnothing$

إذا كان $m \in [-2 ; 4[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

إذا كان $m = 4$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما.

إذا كان $m \in]4 ; +\infty[$ فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $s = \varnothing$.