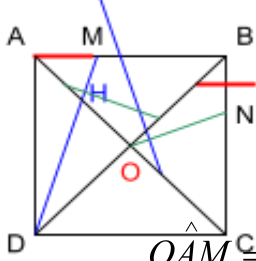


$ABCD$ مربع ، M ، N نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث $AM = BN$ ،
 H نقطة تقاطع $[AN]$ و $[DM]$.

- (1) بين أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
- (2) استنتج طبيعة المثلث AHD .
- (3) ما هي مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$ ؟
- (4) ما هي مجموعة النقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمسح $[AB]$ ؟

الحل :



(1) تبين أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
 نوجه المستوي فالاتجاه غير المباشر. لدينا $ABCD$ مربع إذن قطراه $[AC]$ و $[BD]$

متقايسان ، متناصفان في O و متعامدان . ومنه $OA = OD$ و $\hat{DOA} = 90^\circ$
 وبالتالي : A هي صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90° .

نقارن بين المثلثين AMO و BNO لدينا : $OA = OB$ و $AM = BN$ ، $\hat{OAM} = \hat{OBN} = 45^\circ$

إذن المثلثان AMO و BNO متقايسان وبالتالي : $OM = ON$ و $\hat{AOM} = \hat{BON}$

ومنه $\hat{AOB} = \hat{MON} = 90^\circ$ أي : $\hat{AOM} + \hat{MOB} = \hat{BON} + \hat{MOB}$

إذن : N هي صورة M بنفس الدوران السابق الذي مركزه O وزاويته 90° .

خلاصة : صورة القطعة $[AN]$ هي القطعة $[DM]$ بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90° .
 (2) استنتج طبيعة المثلث AHD .

لدينا صورة (AN) بالدوران الذي مركزه O وزاويته 90° هي المستقيم (DM) ،

ومنه إحدى الزوايا المحورة بين المستقيمين (AN) و (DM) تقايس زاوية الدوران أي تقايس 90°

إذن المستقيمان (AN) و (DM) متعامدان وبالتالي المثلث AHD قائم في H .

(3) تعيين مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$:

نسمي (h) مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$

● إذا أخذنا M في الحد الأول من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على A

فإن N تكون منطبقة على B ومنه $[DM]$ هي $[AD]$ و $[AN]$ هي $[AB]$

وبالتالي H تكون منطبقة على A إذن المجموعة (h) تشمل النقطة A .

إذا أخذنا M في الحد الثاني من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على B

فإن N تكون منطبقة على C ومنه $[DM]$ هي $[DB]$ و $[AN]$ هي $[AC]$

وبالتالي H تكون منطبقة على O إذن المجموعة (h) تشمل النقطة O .

ومنه المجموعة (h) غير خالية.

● لتكن H نقطة من المجموعة (h)

إذن H هي نقطة تقاطع $[AN]$ و $[DM]$

حيث M ، N نقطتان من $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب و $AM = BN$ ،

مما سبق لدينا مهما كانت النقطة M من القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن :

المثلث AHD قائم في H

وبالتالي H هي نقطة من القوس AO للدائرة ذات القطر $[AD]$

ومنه المجموعة (h) محتواة في القوس AO

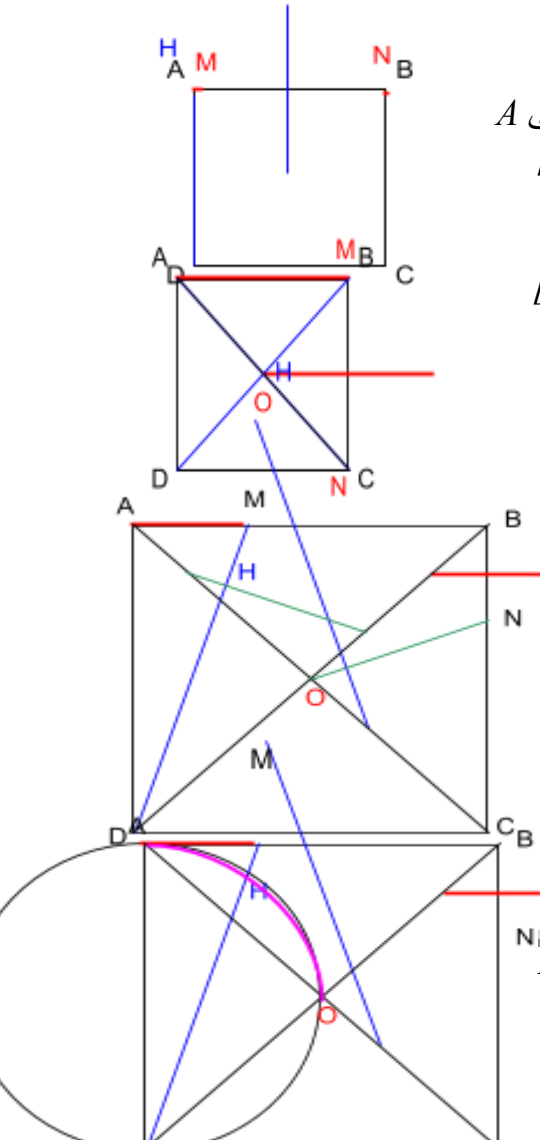
● لتكن H نقطة من القوس AO

(DH) يقطع $[AB]$ في M و (AH) يقطع $[BC]$ في N

لنبرهن أن $AM = BN$:

نقارن بين المثلثين ADM و ABN لدينا : $AD = AB$

$\hat{ADM} = \hat{BAN}$ و $\hat{MAD} = \hat{ABN} = 90^\circ$ يحصران نفس القوس AO



إذن المثلثان ABN و ADM متقايسان ومنه $AM = BN$ وبالتالي H هي نقطة من المجموعة (h) أي : AO محتواة في (h) خلاصة : $h = AO$.

(4) تعيين مجموعة النقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمشح $[AB]$:
نسمي المجموعة المطلوبة (s) ،

● نأخذ M منطبقة على A فإن N تكون منطبقة على B وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[AB]$.

إذن المجموعة (s) تشمل النقطة E منتصف $[AB]$.

نأخذ M منطبقة على B فإن N تكون منطبقة على C وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[BC]$.

إذن المجموعة (s) تشمل كذلك النقطة F منتصف $[BC]$.
إذن المجموعة (s) غير خالية.

● لتكن S نقطة من المجموعة (s) إذن النقط S منتصف $[MN]$ هي المسقط العمودي للنقطة S على (BC) .

في المثلث MBN لدينا : $(SG) \parallel (MB)$ و S منتصف $[MN]$

إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا G منتصف $[NN]$ و $MB = 2 SG$

لدينا : $AE = EB = BF$ و $AM = BN$ إذن : $ME = NF$

ومنه : $MB = ME + EB = NF + BF = NF + NF + BN$

ومنه : $MB = 2 NF + 2 NG = 2(NF + NG) = 2GF$

بما أن $MB = 2 SG$ فإن $SG = GF$ منه المثلث SGF قائم ومتساوي الساقين وبالتالي : $\hat{SFG} = 45^\circ$

ولدينا المثلث EBF ومتساوي الساقين إذن $\hat{EFB} = 45^\circ$ أي : $\hat{EFG} = 45^\circ$ ومنه : $\hat{SFG} = \hat{EFG}$

وبالتالي النقط S تنتمي إلى القطعة $[EF]$ إذن : $(s) \subset [EF]$

● لتكن S نقطة من القطعة $[EF]$

نعين M من $[AB]$ و N من $[BC]$ حيث $SM = SN = SB$

لدينا : $\hat{MSB} + \hat{SMB} + \hat{MBS} = 180^\circ$

و $\hat{BSN} + \hat{SBN} + \hat{NBS} = 180^\circ$

ومنه : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} = 180^\circ$ و $\hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 180^\circ$

إذن : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} + \hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 360^\circ$

أي : $\hat{MSN} + 180^\circ = 360^\circ$ ومنه : $\hat{MSN} + 2\hat{MBN} = 360^\circ$

إذن $\hat{MSN} = 180^\circ$ وبالتالي M, S, N في استقامة ومنه : النقط S منتصف $[MN]$

G نقطة من $[BC]$ حيث $BG = NC$ بما أن F منتصف $[BC]$ فإن F منتصف $[GN]$ كذلك

ولدينا النقط S منتصف $[MN]$ إذن بتطبيق نتائج مبرهنة طاليس في المثلث NGM نجد $(SF) \parallel (GM)$

ومنه : $(EF) \parallel (GM)$ إذن : $\hat{BMG} = \hat{BEF} = 45^\circ$ و $\hat{BGM} = \hat{BFE} = 45^\circ$ ومنه :

$\hat{BMG} = \hat{BGM} = 45^\circ$ إذن المثلث BMG متساوي الساقين وبالتالي : $BG = BM$

بما أن $BG = NC$ فإن $BM = NC$ ومنه : $AM = BN$ إذن : S تنتمي إلى (s) إذن : $[EF] \subset (s)$

خلاصة : لدينا : $(s) \subset [EF]$ و $[EF] \subset (s)$ إذن : $(s) = [EF]$.

