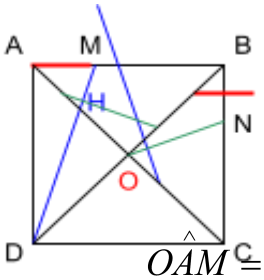
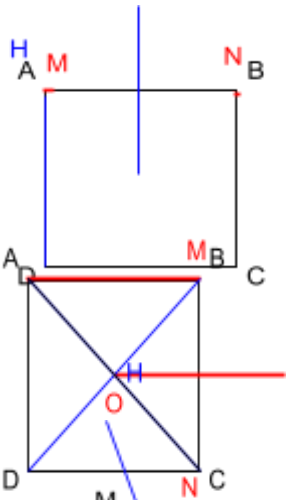
$ABCD$ مربع ، $N$ ، $M$ نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث $AM = BN$ ،
$H$ نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$.

1) بين أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
2) استنتج طبيعة المثلث $AHD$.
3) ما هي مجموعة النقط $H$ عندما $M$ تمسح $[AB]$ ؟
4) ما هي مجموعة النقط $S$ منتصف $[MN]$ عندما $M$ تمسح $[AB]$ ؟

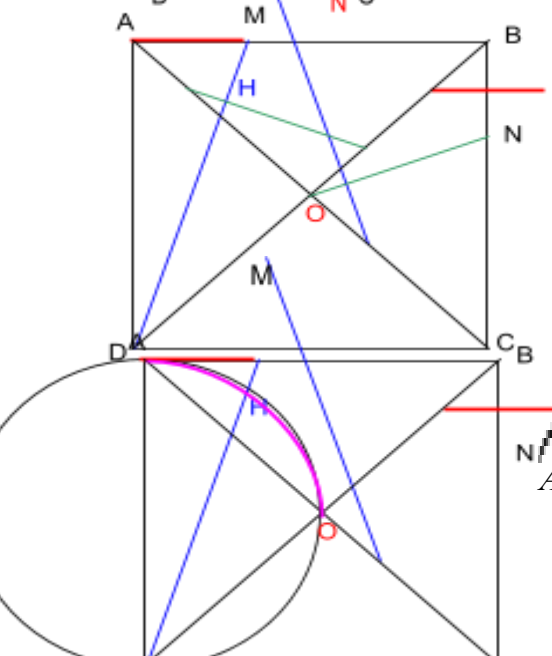
**الحل :**




1) تبيان أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
نوجه المستوي فالاتجاه غير المباشر. لدينا $ABCD$ مربع إذن قطراه $[AC]$ و $[BD]$
متقايسان ، متناصفان في $O$ و متعامدان . ومنه $OA = OD$ و $D\hat{O}A = 90°$
وبالتالي : $A$ هي صورة $D$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $90°$ .
نقارن بين المثلثين $AMO$ و $BNO$ لدينا : $OA = OB$ و $AM = BN$ ، $O\hat{A}M = O\hat{B}N = 45°$
إذن المثلثان $AMO$ و $BNO$ متقايسان وبالتالي : $OM = ON$ و $A\hat{O}M = B\hat{O}N$
ومنه $A\hat{O}M + M\hat{O}B = B\hat{O}N + M\hat{O}B$ أي : $A\hat{O}B = M\hat{O}N = 90°$
إذن : $N$هي صورة $M$ بنفس الدوران السابق الذي مركزه $O$ وزاويته $90°$ .
خلاصة : صورة القطعة $[AN]$ هي القطعة $[DM]$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $90°$ .
2) استنتاج طبيعة المثلث $AHD$.
لدينا صورة $(AN)$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $90°$ هي المستقيم $(DM)$،
ومنه إحدى الزوايا المحورة بين المستقيمين $(AN)$ و $(DM)$ تقايس زاوية الدوران أي تقايس $90°$
إذن المستقيمان $(AN)$ و $(DM)$ متعامدان وبالتالي المثلث $AHD$ قائم في $H$.
3) تعيين مجموعة النقط $H$ عندما $M$ تمسح $[AB]$ :
نسمي $(h)$ مجموعة النقط $H$ عندما $M$ تمسح $[AB]$



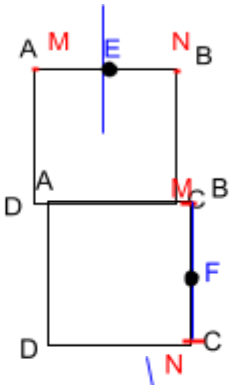

- إذا أخذنا $M$ في الحد الأول من القطعة $[AB]$ أي $M$ منطبقة على $A$
فإن $N$ تكون منطبقة على $B$ ومنه $[DM]$ هي $[AD]$ و $[AN]$ هي$[AB]$
وبالتالي $H$ تكون منطبقة على $A$ إذن المجموعة $(h)$ تشمل النقطة $A$.
إذا أخذنا $M$ في الحد الثاني من القطعة $[AB]$ أي $M$ منطبقة على $B$
فإن $N$ تكون منطبقة على $C$ ومنه $[DM]$ هي $[DB]$ و $[AN]$ هي$[AC]$
وبالتالي $H$ تكون منطبقة على $O$ إذن المجموعة $(h)$ تشمل النقطة $O$.
ومنه المجموعة $(h)$ غير خالية.



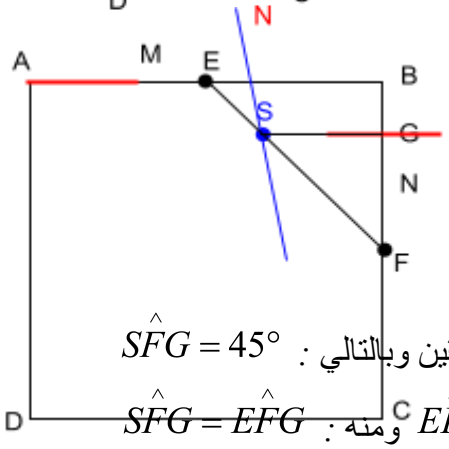

- لتكن $H$ نقطة من المجموعة $(h)$
إذن $H$ هي نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$
حيث $N$ ، $M$ نقطتان من $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب و $AM = BN$ ،
مما سبق لدينا مهما كانت النقطة $M$ من القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن :
المثلث $AHD$ قائم في $H$
وبالتالي $H$ هي نقطة من القوس $AO$ للدائرة ذات القطر $[AD]$
ومنه المجموعة $(h)$ محتواة في القوس $AO$
- لتكن $H$ نقطة من القوس $AO$
$(DH)$ يقطع $[AB]$ في $M$ و $(AH)$ يقطع $[BC]$ في $N$
لنبرهن أن $AM = BN$ :
نقارن بين المثلثين $ADM$ و $ABN$ لدينا : $AD = AB$
$M\hat{A}D = A\hat{B}N = 90°$ و $A\hat{D}M = B\hat{A}N$ يحصران نفس القوس $AH$

إذن المثلثان $ADM$ و $ABN$ متقايسان ومنه $AM = BN$
وبالتالي $H$ هي نقطة من المجموعة $(h)$ أي : $AO$ محتواة في $(h)$
خلاصة : $(AO) = (h)$ .

4) تعيين مجموعة النقط $S$ منتصف $[MN]$ عندما $M$ تمسح $[AB]$ :
نسمي المجموعة المطلوبة $(s)$ ،

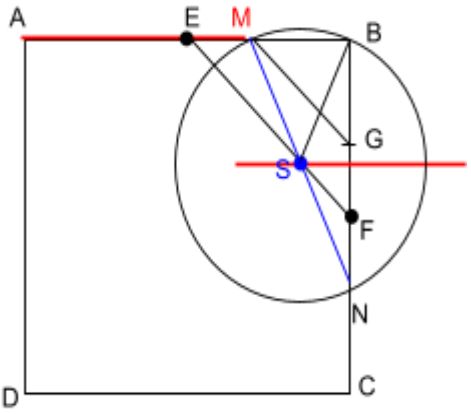



- نأخذ $M$ منطبقة على $A$ فإن $N$ تكون منطبقة على $B$
وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[AB]$.
إذن المجموعة $(s)$ تشمل النقطة $E$ منتصف $[AB]$.
نأخذ $M$ منطبقة على $B$ فإن $N$ تكون منطبقة على $C$
وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[BC]$.
إذن المجموعة $(s)$ تشمل كذلك النقطة $F$ منتصف $[BC]$.
إذن المجموعة $(s)$ غير خلية.
- لتكن $S$ نقطة من المجموعة $(s)$ إذن النقط $S$ منتصف $[MN]$
$G$ هي المسقط العمودي للنقطة $S$ على $(BC)$.
في المثلث $MBN$ لدينا : $(SG) // (MB)$ و $S$ منتصف $[MN]$
إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا $G$ منتصف $[NN]$ و $MB = 2\ SG$
لدينا : $AE = EB = BF$ و $AM = BN$ إذن : $ME = NF$
ومنه : $MB = ME + EB = NF + BF = NF + NF + BN$
ومنه : $MB = 2\ NF + 2\ NG = 2(NF + NG) = 2GF$




بما أن $MB = 2\ SG$ فإن $SG = GF$ منه المثلث $SGF$ قائم ومتساوي الساقين وبالتالي : $\hat{SFG} = 45°$
ولدينا المثلث $EBF$ ومتساوي الساقين إذن $\hat{EFB} = 45°$ أي : $\hat{EFG} = 45°$ ومنه : $\hat{SFG} = \hat{EFG}$
وبالتالي النقط $S$ تنتمي إلى القطعة $[EF]$ إذن : $(s) \subset [EF]$

- لتكن $S$ نقطة من القطعة $[EF]$
نعين $M$ من $[AB]$ و $N$ من $[BC]$ حيث $SM = SN = SB$




لدينا : $\hat{MSB} + \hat{SMB} + \hat{MBS} = 180°$
و $\hat{BSN} + \hat{SBN} + \hat{NBS} = 180°$
ومنه : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} = 180°$ و $\hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 180°$
إذن : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} + \hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 360°$
أي : $\hat{MSN} + 2\hat{MBN} = 360°$ ومنه : $\hat{MSN} + 180° = 360°$
إذن $\hat{MSN} = 180°$ وبالتالي $N$ ، $S$ ، $M$ في استقامية ومنه : النقط $S$ منتصف $[MN]$
$G$ نقطة من $[BC]$ حيث $BG = NC$ بما أن $F$ منتصف $[BC]$ فإن $F$ منتصف $[GN]$ كذلك
ولدينا النقط $S$ منتصف $[MN]$ إذن بتطبيق نتائج مبرهنة طاليس في المثلث $NGM$ نجد $(SF) // (GM)$
ومنه : $(EF) // (GM)$ إذن : $\hat{BMG} = \hat{BEF} = 45°$ و $\hat{BGM} = \hat{BFE} = 45°$ ومنه :
$\hat{BMG} = \hat{BGM} = 45°$ إذن المثلث $BMG$ متساوي الساقين وبالتالي : $BG = BM$
بما أن $BG = NC$ فإن : $BM = NC$ ومنه : $AM = BN$ إذن: $S$ تنتمي إلى $(s)$ إذن : $[EF] \subset (s)$
خلاصة : لدينا : $(s) \subset [EF]$ و $[EF] \subset (s)$ إذن : $(s) = [EF]$ .