5. الزوايا والدائرة :

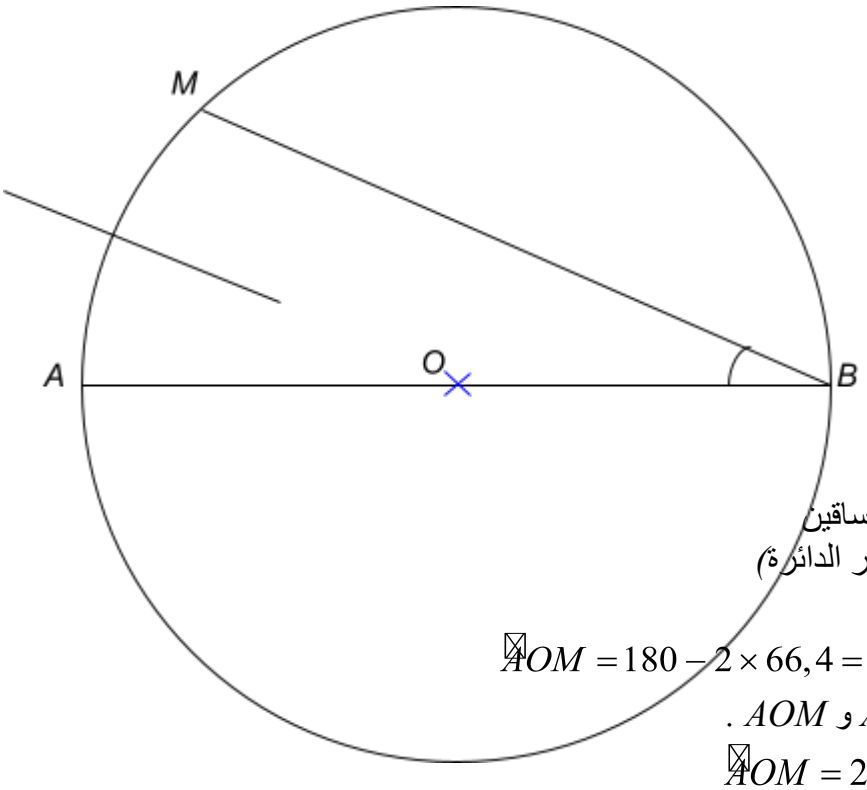
الكفاءات المستهدفة : الزوايا والدائرة .

نشاط 11 :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها $5\ cm$ ، و $[AB]$ قطر فيها ،
و M نقطة من الدائرة حيث $AM = 4\ cm$.

1) باستعمال ال
2) آلة الحاسبة والتدوير إلى $0,1$ أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .
3) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.
4) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



1) حساب قيس الزاوية ABM :
المثلث ABM قائم في M
لأن ضلعه $[AB]$ هو قطر للدائرة (C) .

$$\sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$$ ومنه :

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى $0,1$ نجد :

$$\widehat{ABM} = 23,6°$$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$$\widehat{MAB} = 90 - 23,6 = 66,4°$$

2) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين
رأسه O لأن : $OM = OA$ (نصفي قطر الدائرة)
حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = 66,4°$$ و $$\widehat{AOM} = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$$

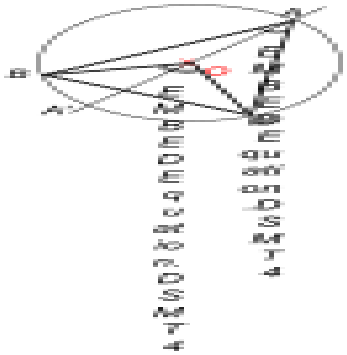
3) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : $47,2 = 23,6 \times 2$ ومنه $\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$

نشاط إضافي :

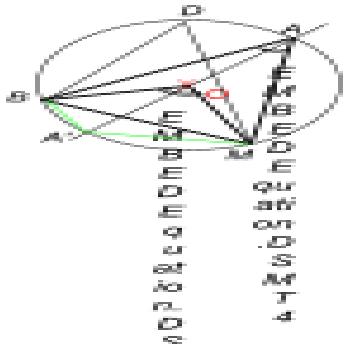
M ، B ، A ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة A'.

نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$.



1) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،
ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،
وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$.
2) استنتج العلاقة بين α و β .
3) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،
واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.
4) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

حل النشاط :



1) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،
لدينا $OA = OM = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة)
إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$:

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'}=\widehat{MAO}+\widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO}=\widehat{OMA}=\widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'}=2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$:

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'}=\widehat{BAO}+\widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO}=\widehat{OBA}=\widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'}=2\widehat{BAA'}$.

2) استنتاج العلاقة بين α و β .

$\widehat{BOM}=\widehat{BOA'}+\widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM}=2\widehat{BAA'}+2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM}=2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta=2\alpha$

3) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M}=180°-\frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M}=180°-\alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

$\widehat{BA'M}+\alpha=180°$ أي : $\widehat{BA'M}+\widehat{BAM}=180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

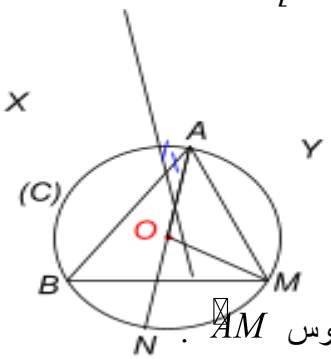
4) D نقطة من القوس الكبرى $\overset{\frown}{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

مما سبق نستنتج أن : $\widehat{BDM}=\frac{\beta}{2}=\alpha$ ومنه : $\widehat{BDM}=\widehat{BAM}$

مفردات ومصطلحات :

(C) دائرة مركزها O ، و N ، M ، B ، A نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.

- القطعة $[AN]$ تسمى **قطرا** ، وكل من القطع $[BM]$ ، $[AM]$ ، $[AB]$ تسمى **وترا** في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى **مماسا** للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).

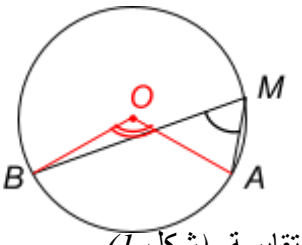


- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية **مركزية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.

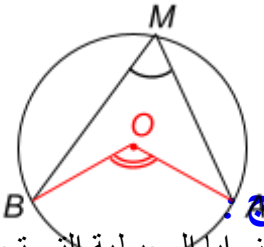
● الزاوية $\widehat{AXB}$ تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AB}$.

مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال : M ، B ، A ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.

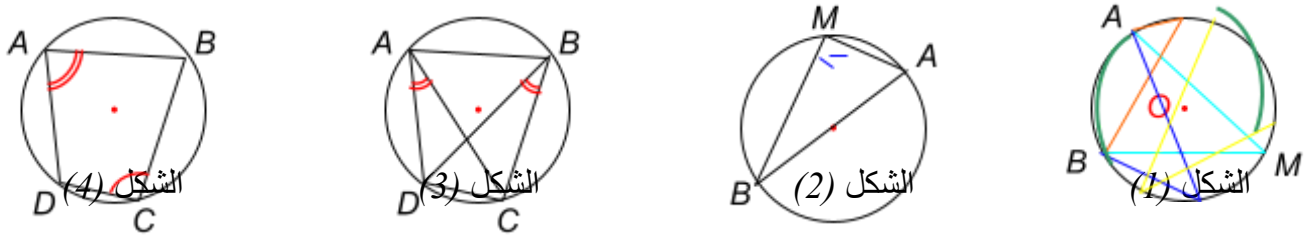


$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



نتائج :

1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل 1)
2) إذا كانت القطعة $[AB]$ قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A و B ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 2)
3) تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. (شكل 3)
4) يكون الرباعي المحدب $ABCD$ دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل 4)



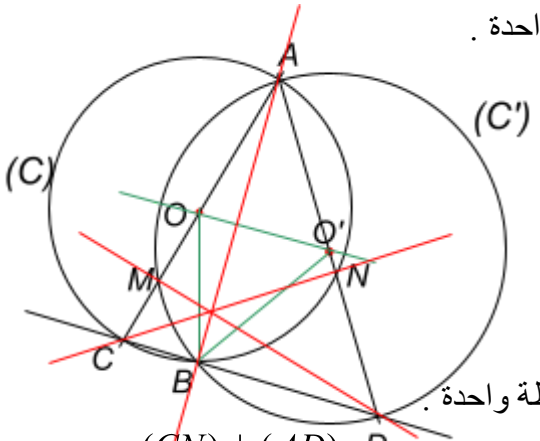
تطبيقات :

تمرين : 75 صفحة 244

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و B ، $[AC]$ قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و $[AD]$ قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط D ، B ، C في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (MD) ، (CN) ، (AB) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحل :



2) تبيان أن النقط D ، B ، C في استقامية .

$\widehat{ABC} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD} = 180°$

وبالتالي : $(CB) // (CD)$ ومنه : النقط D ، B ، C في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (MD) ، (CN) ، (AB) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

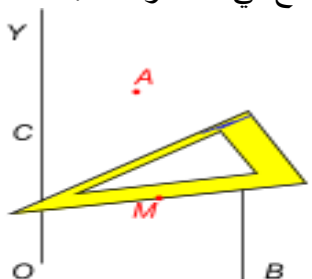
ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (MD) ، (CN) ، (AB) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

تمرين : 81 صفحة 245

(OX) و (OY) نصفا مستقيمين متعامدان في النقطة O ،



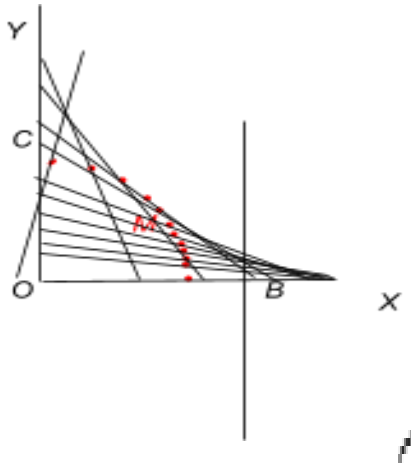
نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX)$ وتتحرك C على $[OY)$.

1) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

2) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟

(إرشاد : بين أن الزاوية $\widehat{AOB}$ ثابتة)

الحل :



1) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$:

نرمز بـ (e) مجموعة النقط (المسار) المطلوبة ،

نرسم عدة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة :

نلاحظ في هذه الحالة أن المسار هو عبارة عن ربع دائرة مركزها O

ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$ نرمز له بالرمز EF

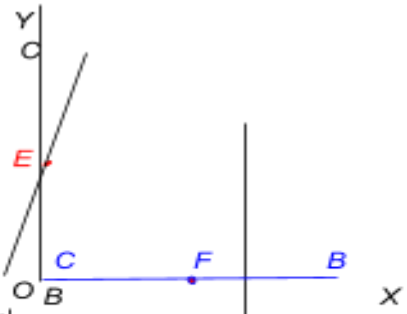
لنبرهن أن $(e) = \overset{\frown}{EF}$:

ولهذا نتبع المراحل التالية :

1) نبين أن (e) مجموعة غير خالية

2) نبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ أي (e) محتواة في $\overset{\frown}{EF}$

3) نبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e) أي $\overset{\frown}{EF}$ محتواة في (e)



- لنبين أن (E) مجموعة غير خالية

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$

والنقطة E منتصف $[BC]$ توجد في $[OY)$ وهي تنتمي إلى (e)

إذن : $(e) \neq \Phi$

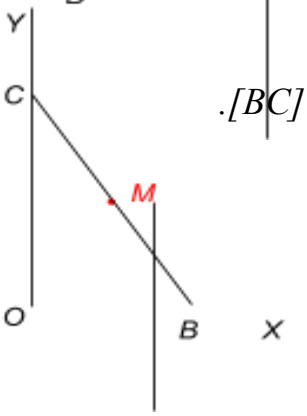
إذا أخذنا C منطبقة على O فإن النقطة B تكون في $[OX)$

والنقطة F منتصف $[BC]$ توجد في $[OX)$ وهي تنتمي إلى (e)

- لنبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة (e) .

توجد نقطة B من $[OX)$ وتوجد نقطة C من $[OY)$ بحيث : M تكون منتصف القطعة $[BC]$.



المثلث COB قائم في B و النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ ، إذن : $OM = \frac{1}{2}BC$

ومنه النقطة M تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $\frac{BC}{2}$

وبالتالي : $(e) \subset \overset{\frown}{EF}$ . . . *(1)*

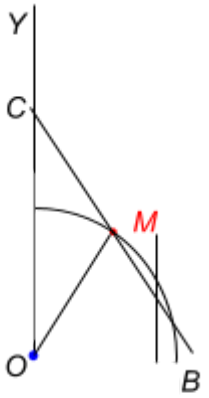
- لنبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e)

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة $\overset{\frown}{EF}$

نعين نقطة B من $[OX)$ و نعين نقطة C من $[OY)$ حيث : $OB = OC = OM$

لنبرهن أن النقط C ، M ، B في استقامية.

لدينا النقط C ، O ، B تنتمي إلى الدائرة ذات المركز M



ومنه : $\widehat{BMC} = 2\widehat{BOC} = 180°$ لأن : $\widehat{BOC}$ زاوية محيطية

و $\widehat{BMC}$ زاوية مركزية وتحصران نفس القوس.

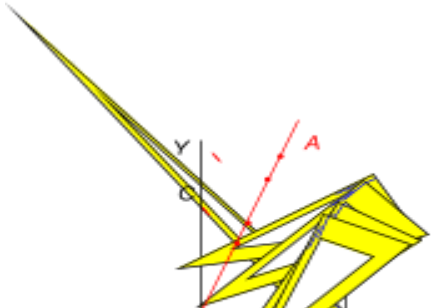
ومنه : النقط C ، M ، B في استقامية.

إذن : النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ وبالتالي : النقطة M تنتمي إلى المجموعة (e) .

أي : $\overset{\frown}{EF} \subset (e)$ . . . *(2)*

خلاصة : من *(1)* و *(2)* نستنتج أن : $(e) = \overset{\frown}{EF}$

2) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة A :



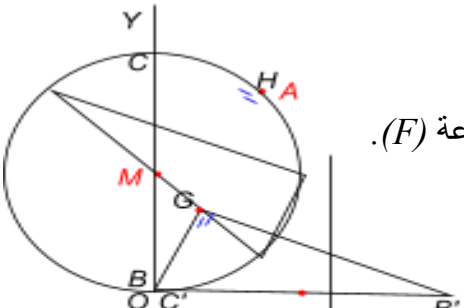
نسمي (F) المسار المطلوب ، وهي مجموعة النقط A بحيث
تكون النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ و ABC يمثل كوسا

أي مثلثا قائما في A . نضع الزاوية $\widehat{ACB}$ للكوس هي α
نلاحظ أن النقطة A هي نقطة من قطعة مستقيمة $[GH]$.

حيث O ، G ، H في استقامية و $\widehat{GOB} = \widehat{ACB} = \alpha$

- لنبرهن أن (F) غير خالية :

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$.
نرسم الدائرة ذات المركز M منتصف $[BC]$ ونعين النقطة H منها حيث:

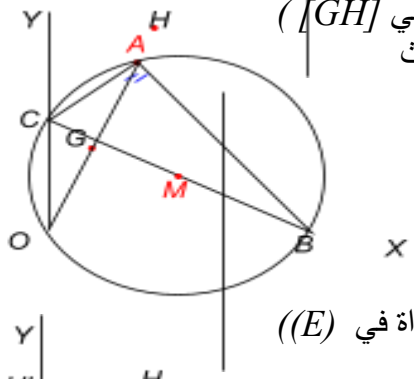


$\widehat{BCH} = \alpha$ ومنه المثلث القائم يعين كوسا إذن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (F).
نأخذ C' منطبقة على B و O ونعين النقطة B' من $[OX)$ حيث $OB' = BC$
نعتبر النقطة G المسقط العمودي للنقطة B' على (OH) .

لدينا : $\widehat{GC'B'} = \widehat{BCH} = \alpha$ إذن المثلث القائم $GB'C'$ يمثل كوسا
إذن النقطة G تنتمي إلى المجموعة (F). وبالتالي المجموعة (F) غير خالية :

- لنبين أن كل نقطة A من (F) تنتمي إلى $[GH]$ (أي (E) محتواة في $[GH]$)

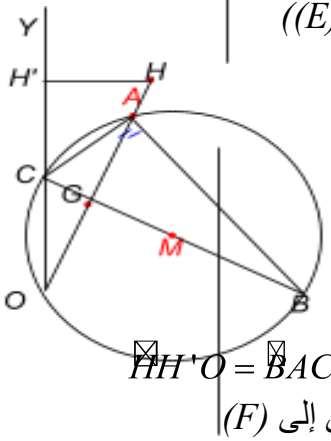
لتكن A نقطة من (F) أي : توجد النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ حيث



ABC مثلثا قائما في A و $\widehat{ACB} = \alpha$
لدينا $ACOB$ رباعي دائري في الدائرة ذات القطر $[AB]$
ومنه $\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \alpha$ تحصران نفس القوس إذن A تنتمي إلى $[GH]$.
ومنه : $(F) \subset [GH]$

- لنبين أن كل نقطة A من $[GH]$ تنتمي إلى(F) (أي $[GH]$ محتواة في (E))

لتكن A نقطة من $[H$ ، $GH']$ المسقط العمودي للنقطة H على (OY)
ولدينا : $OG = HH'$ نعين نقطة C من $[OH']$ حيث $AC = OG$.



نعين نقطة B من $[OX)$ حيث $\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \alpha$

إذن الرباعي $ACOB$ دائري ومنه الزاويتان المتقابلتان $\widehat{COB}$ و $\widehat{CAB}$ متكاملتان
إذن المثلث ACB قائم في A .
لدينا المثلث القائم OHH' يمثل كوسا

وبمقارنته مع المثلث BAC لدينا : $HH' = AC$ و $\widehat{H'HO} = \widehat{ACB} = \alpha$ و $\widehat{HH'O} = \widehat{BAC} = 90°$
إذن المثلثان OHH' و BAC متقايسان ومنه BAC يمثل كذلك كوسا إذن النقطة A تنتمي إلى (F)
وبالتالي : $[GH] \subset (F)$

خلاصة : لدينا $(F) \subset [GH]$ و $[GH] \subset (F)$ إذن : $(F) = [GH]$.