8. التحويلات النقطية:

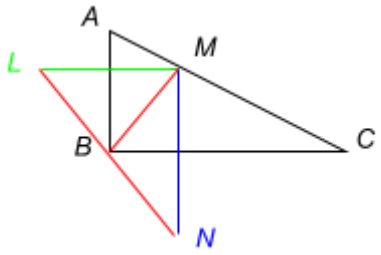
نشاط 1 : *102* صفحة *247*

ABC مثلث قائم في M ، B نقطة من وتره $[AC]$. النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى $[LN]$. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة $[LM]$

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن $BL = BM$

و (AB) يكون منصف الزاوية $\widehat{LBM}$ أي : $\widehat{LBM} = 2 \times \widehat{ABM}$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة $[MN]$

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن $BN = BM$

و (BC) يكون منصف الزاوية $\widehat{MBN}$ أي : $\widehat{MBN} = 2 \times \widehat{MBC}$

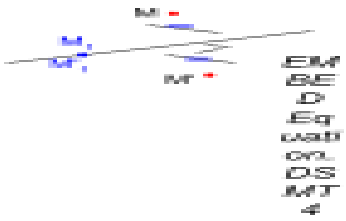
وبالتالي : $BN = BL$

ولدينا : $\widehat{LBN} = \widehat{LBM} + \widehat{MBN} = 2 \times \widehat{ABM} + 2 \times \widehat{MBC} = 2(\widehat{ABM} + \widehat{MBC}) = 2\,\widehat{ABC} = 180°$

ومنه N ، B ، L على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة $[LN]$.

1) تعاريف :

- **تعريف التناظر المحوري :**

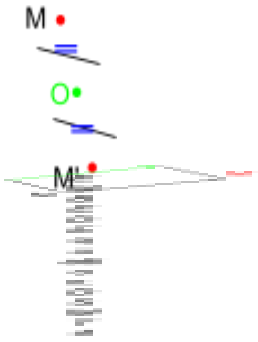


(Δ) مستقيم ثابت ، **التناظر المحوري** بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،

وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة $[MM']$.

- **تعريف التناظر المركزي :**



O نقطة ثابتة من المستوي ، **التناظر المركزي** بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

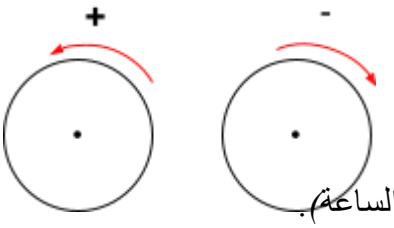
تكون النقطة O منتصف القطعة $[MM']$.

- **تعريف الانسحاب :**

$\overrightarrow{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، **الانسحاب** الذي شعاعه $\overrightarrow{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$

ملاحظة : إذا كان $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $ABMM'$ هو متوازي أضلاع.

- **توجيه المستوي :**



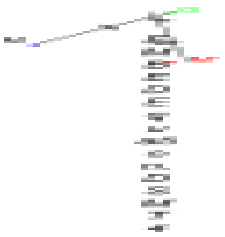
لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **المباشر** *(أو* **الاتجاه الموجب***)* ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **غير المباشر** *(أو* **الاتجاه السالب***)*.

تعريف : توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة : لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر *(عكس اتجاه حركة عقارب الساعة)*.

- **تعريف الدوران :**

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، **الدوران** الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :
إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.



وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : $OM' = OM$ و $\overline{MOM'} = \alpha$
والثلاثية $(O\ ,\ M\ ,\ M')$ مباشرة.
ملاحظة : في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

2) خواص :

- **النقط الصامدة :**

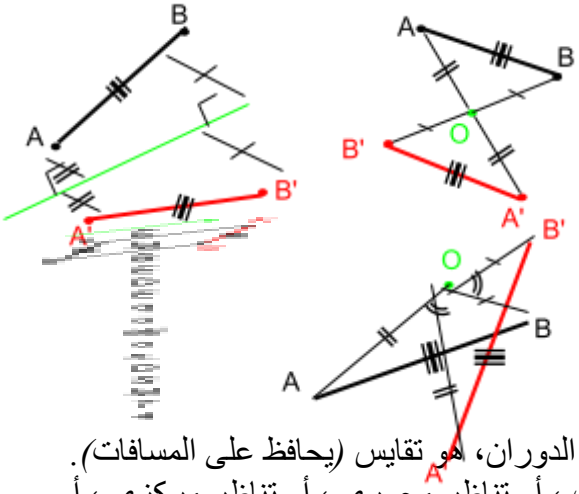
تعريف : نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.
أمثلة :

- ✔ **التناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ) : كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✔ **التناظر المركزي** الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✔ **الانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✔ **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.
- ✔ **ملاحظة :** إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

- **حفظ المسافات (التقايس)**

تعريف : التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية $(A\ ,\ B)$ الثنائية النقطية $(A'\ ,\ B')$ حيث : $A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.

أمثلة :



- ✔ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : $A'B' = AB$
- ✔ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المركزي** الذي مركزه النقطة O : لدينا $A'B' = AB$
- ✔ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا $A'B' = AB$
- ✔ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α : لدينا $A'B' = AB$

مبرهنة : كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس *(يحافظ على المسافات)*.
نتيجة : يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.
ملاحظة : إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- **حفظ أقياس الزوايا :**

مبرهنة : صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- **حفظ الاستقامية :**

مبرهنة : إذا كانت C ، B ، A في استقامية فإن صورها C' ، B' ، A' ، بتقايس ، تكون في استقامية.
نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس *(تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران)* هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :

إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.

- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

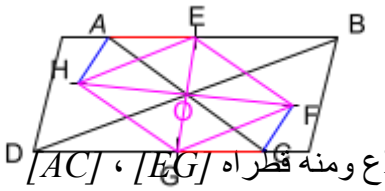
تطبيق 1 : *103 صفحة 247*

$ABCD$ متوازي أضلاع. H ، G ، F ، E نقط من $[AD]$ ، $[CD]$ ، $[BC]$ ، $[AB]$ على الترتيب حيث : $AE = CG$ و $AH = CF$.

1) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

2) ما هي طبيعة الرباعي $EFGH$ ؟

الحل :



1) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن قطراه $[BD]$ ، $[AC]$ متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

2) طبيعة الرباعي $EFGH$:

الطريقة 1 : $(AE) // (GC)$ و $AE = GC$ إذن الرباعي $AECG$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[EG]$ ، $[AC]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

$(FC) // (AH)$ و $AH = FC$ إذن الرباعي $AFCH$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[HF]$ ، $[AC]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و Hهي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O إذن $[HG]$ هي صورة $[EF]$ بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : $(HG) // (EF)$

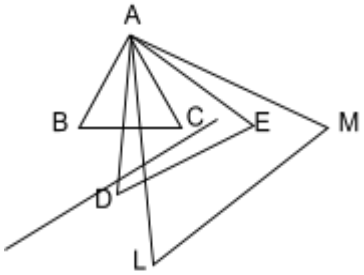
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : $HG = EF$ وبالتالي الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 : نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : $EH = FG$ و $EF = HG$.

تطبيق 2 : *105 صفحة 248*

يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ALM ، ADE ، ABC كل منها متقايسة الأضلاع حيث النقط L ، D ، B في استقامية. بين أن النقط M ، E ، C في استقامية.



الحل :

بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : $AM = AL$ ، $AE = AD$ ، $AC = AB$

و $\hat{BAC} = \hat{DAE} = \hat{LAM} = 60°$

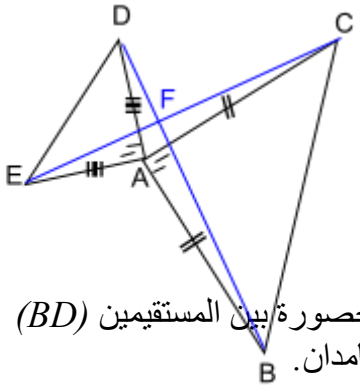
ومنه : M ، E ، C هي صور L ، D ، B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $60°$.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط L ، D ، B في استقامية فإن النقط M ، E ، C في استقامية كذلك.

تطبيق 3 : *107 صفحة 248 (نفس معطيات التمرين 95)*

ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ، $[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.



الحل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته $90°$.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و (CE) تقايس زاوية الدوران التي هي $90°$ ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

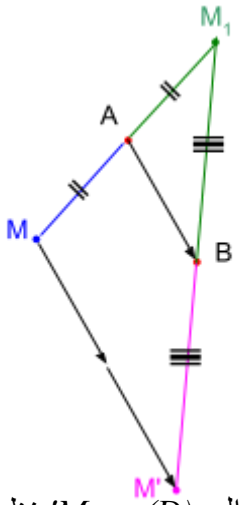
تطبيق 4 : *109 صفحة 248 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)*

A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

1) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

2) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.



الحل :

1) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(MM') // (AB')$ و $MM' = 2\,AB$

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

2) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

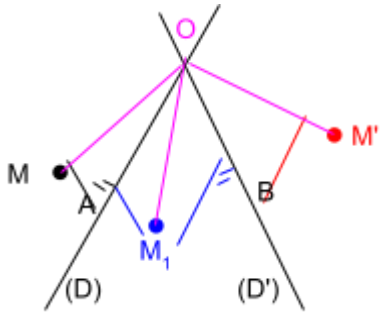
تطبيق 5 : *110* صفحة *248* (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

1) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $\hat{MOM'}$ ثابتة.

2) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

الحل :



1) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $\hat{MOM'}$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $\hat{MOA} = \hat{AOM_1}$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $\hat{M_1OB} = \hat{BOM'}$ ومنه : $OM = OM'$

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $\hat{AOB} = \alpha$.

$$\hat{MOM'} = \hat{MOM_1} + \hat{M_1OM'} = 2\,\hat{AOM_1} + 2\,\hat{M_1OB} = 2\,\hat{AOB} = 2\alpha$$

2) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : $OM = OM'$ و $\hat{MOM'} = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.