II) المجالات في R :

نشاط 5 :

عين مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينة في كل حالة من الحالات التالية :

$x \geq 0$ ؛ $x < 0$ ؛ $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ ؛ $\sqrt{3} \leq x < 3$ ؛

حل النشاط :

$x \geq 0$ يكافئ $x \in [0 \ ; \ +\infty[$ $x < 0$ يكافئ $x \in]-\infty \ ; \ 0[$

$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ يكافئ $x \in [-\frac{3}{2} \ ; \ 3]$ $\sqrt{3} \leq x < 3$ يكافئ $x \in [-\sqrt{3} \ ; \ 3[$

1) التعريف : a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

نسمي **مجالا مغلقا** حداه a و b مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a \leq x \leq b$ ونرمز إليه بالرمز $[a \ , \ b]$.

$a \leq x \leq b$ تكافئ $x \in [a \ , \ b]$

يمثل المجال $[a \ , \ b]$ هندسيا بالشكل الآتي



حيث a و b فاصلتا النقطتين A و B على الترتيب.

ملاحظات :

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a < x < b$ تسمى مجالا مفتوحا ونرمز إليها بالرمز $]a \ , \ b[$.

2) أنواع المجالات :

المجال الذي يرمز إليه	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث:
$[a \ ; \ b]$	$a \leq x \leq b$
$]a \ ; \ b[$	$a < x < b$

$a \le x < b$	$]a\ ;\ b]$
$a < x \le b$	$[a\ ;\ b[$
$x \ge a$	$[a;+\infty[$
$x > a$	$]a;+\infty[$
$x \le b$	$]-\infty;b]$
$x < b$	$]-\infty;b[$
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$

نشاط 6 :

أكتب على شكل مجالات ، مجموعة الأعداد الحقيقية x المعرفة بالمتباينات التالية:

$x \ge -5$ و $x \le 7$ ؛ $x \ge \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ ؛ $2 \le x \le 5$ و $-2 \le x \le \sqrt{5}$

$2 \le x \le 5$ أو $-2 \le x \le \sqrt{5}$ ؛ $10 \le x < 17$ أو $-10 \le x \le 2$ ؛ $7 < x < 10^2$ أو $x \ge -2$

حل النشاط :

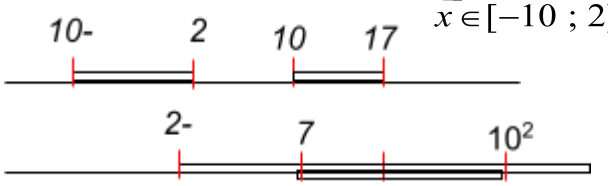
$x \ge -5$ و $x \le 7$ معناه $-5 \le x \le 7$ يكافئ $x \in [-5\ ;\ 7]$

$x \ge \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ يكافئ $x \in]\sqrt{3} + \infty[$

$2 \le x \le 5$ و $-2 \le x \le \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [2\ ;\ \sqrt{5}]$

$2 \le x \le 5$ أو $-2 \le x \le \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ 5]$

$10 \le x < 17$ أو $-10 \le x \le 2$ يكافئ $x \in [-10\ ;\ 2] \cup [10\ ;\ 17[$



$7 < x < 10^2$ أو $x \ge -2$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ +\infty[$

3) **تقاطع واتحاد مجالين :**

تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ونرمز إليه بالرمز $I \cap J$

اتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ونرمز إليه بالرمز $I \cup J$

$I \cap J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I \quad x \in J\}$ $\quad$ $I \cup J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I \quad x \in J\}$

ملاحظة : إذا كان $I \subset J$ فإن : $I \cap J = I$ و $I \cup J = J$

تطبيق : عين مجموعة الأعداد الحقيقية x في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$2x^2 - 5x \ge 0$ $\quad$ $5x^2 \le \sqrt{5}x$

الحل :

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $x(2x-5) \ge 0$

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $[\ (x \ge 0)$ و $(2x-5 \ge 0)\ ]$ أو $[\ (x \le 0)$ و $(2x-5 \le 0)\ ]$

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $[\ (x \ge 0)$ و $(x \ge \frac{5}{2})\ ]$ أو $[\ (x \le 0)$ و $(x \le \frac{5}{2})\ ]$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $(x \geq \frac{5}{2})$ أو $(x \leq 0)$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $x \in]-\infty\ ;\ 0] \cup [\frac{5}{2}\ ;\ +\infty[$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $5x^2 - \sqrt{5}x \leq 0$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $x(5x - \sqrt{5}) \leq 0$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(5x - \sqrt{5} \leq 0)\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(5x - \sqrt{5} \geq 0)\ ]$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(x \leq \frac{\sqrt{5}}{5})\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(x \geq \frac{\sqrt{5}}{5})\ ]$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{5})$ أو $(x \in \Phi)$ معناه $x \in [0\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{5}]$

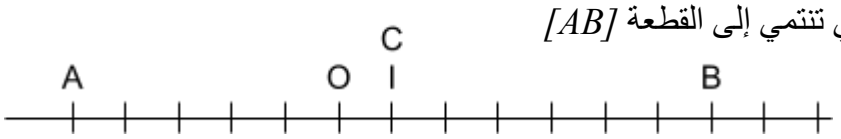
نشاط 7 :

في المستقيم العددي (O,I) نعلم النقطتين A و B فاصلتاهما (-5) و 7 على الترتيب

عين فاصلة النقطة C منتصف $[AB]$ وأحسب الطول AB.

عين مجموعة فواصل النقط M التي تنتمي إلى القطعة $[AB]$

حل النشاط :



فاصلة C هي $\frac{7-5}{2} = 1$ و $AB = 12$.

فواصل النقط M التي تنتمي إلى القطعة $[AB]$ هي المجال $[-5\ ;\ 7]$.

4) **المجال المركزي :**

تعريف : المجال $[a\ ;\ b]$ يسمى مجال مركزي مركزه العدد $\frac{a+b}{2}$ وطوله $b - a$ ونصف قطره $\frac{b-a}{2}$

ملاحظة : بوضع المركز $\frac{a+b}{2} = c$ و نصف قطره $\frac{b-a}{2} = r$ نجد :

$c + r = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$ و $c - r = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$ وبالتالي : $[a\ ;\ b] = [c - r\ ;\ c + r]$

تطبيق : *42* صفحة *45*

عين مركز وطول كل مجال : $[-2\ ;\ 2]$ ؛ $[-0,5\ ;\ 0,1]$ ؛ $[-\pi + 1\ ;\ \pi + 1]$

الحل :

$[-2\ ;\ 2]$ طوله $2 - (-2) = 4$ ومركزه $\frac{2 + (-2)}{2} = 0$

$[-0,5\ ;\ 0,1]$ طوله $0,1 - (-0,5) = 0,6$ ومركزه $\frac{-0,5 + 0,1}{2} = -0,2$

$[-\pi + 1\ ;\ \pi + 1]$ طوله $(\pi + 1) - (-\pi + 1) = 2\pi$ ومركزه $\frac{(\pi + 1) + (-\pi + 1)}{2} = 1$

تطبيق : *43* صفحة *45*

ما هما حدا المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ وطوله 0.7 ؟

الحل :

لدينا الطول $0,7$ إذن نصف قطر المجال هو $r = 0,35$ والمركز $c = -5,3$

ولدينا المجال المغلق الذي مركزه c ونصف قطره r هو من الشكل : $[c - r\ ;\ c + r]$

$c - r = -5,3 - 0,35 = -0,65$ و $c + r = -0,3 + 0,35 = 0,05$

المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ وطوله 0.7 هو $[-5,65\ ;\ -0,05]$

5) الحصر :

التعريف : a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

إذا كانت $(a \le x \le b)$ فنقول أن العدد x محصور بين العددين a و b ، المجال $[a\ ;\ b]$ هو حصر للعدد x.

ملاحظات :

- $]$ العدد x محصور بين العددين a و b $[$ معناه $(a \le x \le b)$ ومعناه $(x \in [a\ ;\ b])$
- إذا كان $a < x < b$ فنقول أن العدد x محصور تماما بين العددين a و b

نتائج : مما سبق لدينا النتائج التالية :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ فإن : $(a + c \le x + c \le b + c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $c > 0$ فإن : $(a \times c \le x \times c \le b \times c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a + c \le x + y \le b + d)$

بفرض a و c موجبان :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \times c \le x \times y \le b \times d)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(a^2 \le x^2 \le b^2)$

ملاحظات :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(-d \le -y \le -c)$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a - d \le x - y \le b - c)$

بفرض a و c موجبان تماما :

إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c})$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a - d \le x - y \le b - c)$

بفرض أن a و c موجبان تماما :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

تطبيق : *65* صفحة *46* :

باستعمال الحصر $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ أحصر كلا من الأعداد $\frac{\sqrt{20}}{2}$ ؛ $10\sqrt{20}$ ؛ $6 + \sqrt{20}$ ؛ $-\sqrt{20}$

الحل :

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $\frac{1}{2} \times 4,4721 < \frac{1}{2} \times \sqrt{20} < \frac{1}{2} \times 4,4722$

  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $2,23605 < \frac{\sqrt{20}}{2} < 2,2361$
- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $10 \times 4,4721 < 10\sqrt{20} < 10 \times 4,4722$

  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $44,721 < 10\sqrt{20} < 44,722$

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $6 + 4,4721 < 6 + \sqrt{20} < 6 + 4,4722$

$4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $10,4721 < 6 + \sqrt{20} < 10,4722$

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $-4,4722 < -\sqrt{20} < -4,4721$

تطبيق : *70* صفحة *47*

x و *y* عددان حقيقيان حيث : $1,2 < x < 1,3$ ؛ $2,4 < y < 2,5$

أحصر $x + y$ ؛ $x - y$ ؛ $5\ y - 4\ x$ ؛ xy .

الحل :

- إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن $1,2 + 2,4 < x + y < 1,3 + 2,5$

إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن : $3,6 < x + y < 3,8$

- إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن : $1,2 - 2,5 < x - y < 1,3 - 2,4$

إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن : $-1,3 < x - y < -1,1$

- إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن $6 < 5\ x < 6,5$ و $12 < 5\ y < 12,5$

إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن $-6,5 < -5\ x < -5,5$

- إذا كان $1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$ فإن : $2,88 < xy < 3,25$

تطبيق : *71* صفحة *47*

بفرض $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ أحصر $y - x$ ؛ $x - 2\ y$ ؛ x^2 ؛ y^2 .

الحل :

$x \in [-2\ ;\ 1]$ معناه $-2 \leq x \leq 1$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$

- إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $3 - 1 \leq y - x \leq 4 + 2$

إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $2 \leq y - x \leq 6$

إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $y - x \in [2\ ;\ 6]$

- إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $-2 \leq x \leq 1$ و $6 \leq 2y \leq 8$

إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $-2 - 8 \leq x - 2y \leq 1 - 6$

إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $-10 \leq x - 2y \leq -5$

إذا كان $x \in [-2\ ;\ 1]$ و $y \in [3\ ;\ 4]$ فإن $x - 2y \in [-10\ ;\ -5]$

- $x \in [-2\ ;\ 1]$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ 0]$ أو $x \in [0\ ;\ 1]$ و يكافئ $0 \leq x \leq 1$ أو $-2 \leq x \leq 0$

$x \in [-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0 \leq -x \leq 2$ أو $0 \leq x \leq 1$

$x \in [-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ أو $0 \leq x^2 \leq 1$

$x \in [-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ $\quad$ $x \in [-2\ ;\ 1]$ يكافئ $x^2 \in [0\ ;\ 4]$

- $y \in [3\ ;\ 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$ ويكافئ $9 \leq y^2 \leq 16$.