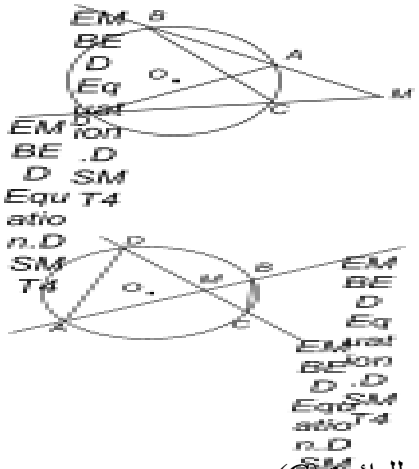
قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة.

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، و M نقطة لا تنتمي إلى (C) ،

نرسم مستقيمين (Δ) و (Δ') يشملان النقطة M و يقطعان الدائرة (C) في النقط D ، C ، B ، A على الترتيب.



1) بين أن المثلثين AMD و CMB متشابهان ،
واستنتج أن $MA \times MB = MC \times MD$.

2) في حالة M خارج C ، كيف تصبح العلاقة السابقة
عندما يكون (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة A ؟

3) نعتبر الآن أن (Δ') يشمل النقطة O .
أحسب $MA \times MB$ بدلالة MO و r في كل من الحالتين.

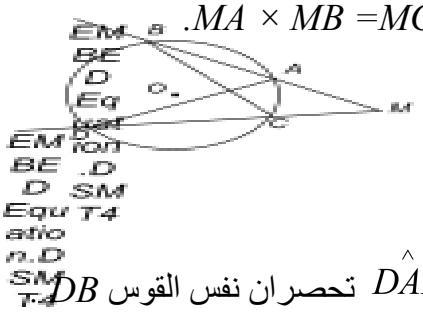
(لاحظ أن الجداء $MA \times MB$ مستقل عن المستقيم الذي يشمل النقطة M القاطع للدائرة (C).
يسمى قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة (C) *)*.

تطبيق : إنشاء العددين α و β علم فرقهما : $\beta - \alpha = r$ وجداؤهما $\beta \times \alpha = r^2$.

أرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، وعلم عليها نقطة A ، وارسم المماس لها الذي يشمل A ، وعلم على هذا المماس نقطة M حيث $AM = r$. أرسم $[MO]$ فيقطع الدائرة في نقطتين D ، C .
تحقق من أن : MD ، MC يحققان المطلوب.

الحل :

1) بين أن المثلثين AMD و CMB متشابهان ، واستنتج أن $MA \times MB = MC \times MD$.



- الحالة الأولى : M خارج الدائرة :

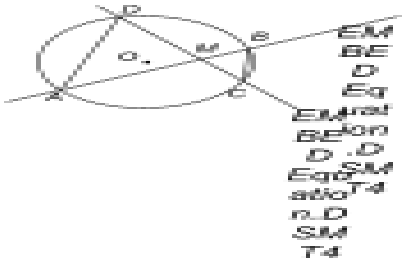
لدينا : $A\hat{M}D = C\hat{M}B$ زاوية مشتركة.

و $A\hat{D}M = C\hat{B}M$ تحصران نفس القوس AC .

ولدينا : $D\hat{A}M = 180° - D\hat{A}B$ و $B\hat{C}M = 180° - D\hat{C}B$ و $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ تحصران نفس القوس DB

إذن : $D\hat{A}M = B\hat{C}M$ ومنه : المثلثان AMD و CMB متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A، D ، M و C ، B ، M ومنه : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{BC}$ إذن : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC}$ وبالتالي : $MA \times MB = MC \times MD$.

- الحالة الثانية : M داخل الدائرة :



لدينا : $A\hat{M}D = C\hat{M}B$ متقابلتان بالرأس.

و $A\hat{D}M = C\hat{B}M$ تحصران نفس القوس AC .

و $D\hat{A}M = B\hat{C}M$ تحصران نفس القوس BD .

ومنه : المثلثان AMD و CMB متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A، D ، M و C ، B ، M

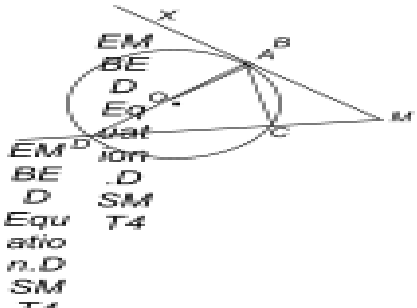
ومنه : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{BC}$ إذن : $\frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC}$ وبالتالي : $MA \times MB = MC \times MD$.

خلاصة : من أجل كل نقطة M من المستوي لا تنتمي إلى الدائرة (C) لدينا : $MA \times MB = MC \times MD$.

2) في حالة M خارج C ، كيف تصبح العلاقة السابقة عندما يكون (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة A ؟

تصبح النقطتين A و B منطبقتين ومنه المثلث CMB هو CMA

لنبين أن : AMD و CMA متشابهان :



لدينا : $A\hat{M}D = A\hat{M}C$ زاوية مشتركة.

و $\hat{ADM} = \hat{CAM}$ تحصران نفس القوس AC .

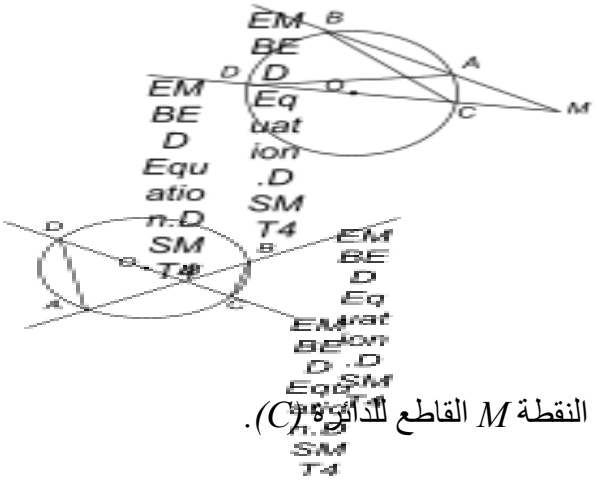
ولدينا : $\hat{DAM} = 180° - \hat{DAX}$ و $\hat{ACM} = 180° - \hat{ACD}$

و $\hat{DAX} = \hat{ACD}$ تحصران نفس القوس AD .

إذن : $\hat{DAM} = \hat{ACM}$ ومنه : المثلثان AMD و CMA متشابهان . الرؤوس المتماثلة على الترتيب A، D ، M و C ، A ، M ومنه : $\frac{MD}{MA} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{AC}$ إذن : $\frac{MD}{MA} = \frac{MA}{MC}$ وبالتالي : $MA^2 = MC \times MD$.

3) نعتبر الآن أن (Δ') يشمل النقطة O . أحسب $MA \times MB$ بدلالة MO و r في كل من الحالتين.

- الحالة الأولى : M خارج الدائرة (C).



لدينا : $MD = MO + r$ و $MC = MO - r$

إذن : $MA \times MB = MC \times MD$

تعني : $MA \times MB = (MO - r) \times (MO + r)$

أي : $MA \times MB = MO^2 - r^2$

- الحالة الثانية : M داخل الدائرة (C).

لدينا : $MD = MO + r$ و $MC = r - MO$

إذن : $MA \times MB = MC \times MD$

تعني : $MA \times MB = (r - MO) \times (MO + r)$

أي : $MA \times MB = r^2 - MO^2$

(لاحظ أن الجداء $MA \times MB$ مستقل عن المستقيم الذي يشمل النقطة M القاطع للدائرة (C).

يسمى قوة النقطة M بالنسبة إلى الدائرة (C)).

تطبيق : إنشاء العددين α و β علم فرقهما : $\beta - \alpha = r$ وجداؤهما $\beta \times \alpha = r^2$.

أرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها r ، وعلم عليها نقطة A ، وارسم المماس لها الذي يشمل A ، وعلم على هذا المماس نقطة M حيث $AM = r$. أرسم $[MO]$ فيقطع الدائرة في نقطتين D ، C .

تحقق من أن : MD ، MC يحققان المطلوب.