IV) جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

نعتبر المعادلات : (E_1) : $x+2y=4$ ، (E_2) : $x-y=1$ ، (E_3) : $x+2y=-1$

(D_1) ، (D_2) ، (D_3) مستقيمات معادلاتها (E_1) ، (E_2) ، (E_3) على الترتيب .

1) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

2) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

3) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية *(2 , 1)* ؟

4) ماذا تعتبر النقطة *A(2 , 1)* بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

5) أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

حل النشاط :

1) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

الحرفان x و y هما مجهولان حقيقيان بالنسبة للمعادلات المعطاة .

2) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

لدينا : (D_1) : $x+2y=4$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(D_2) : $x-y=1$ شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(D_3) : $x+2y=-1$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(D_1) و (D_3) متوازيان لأن لهما نفس شعاع التوجيه

ولدينا : $1\times 1\neq (-2)\times 1$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : (D_2) لا يوازي (D_1) ولا يوازي (D_3)

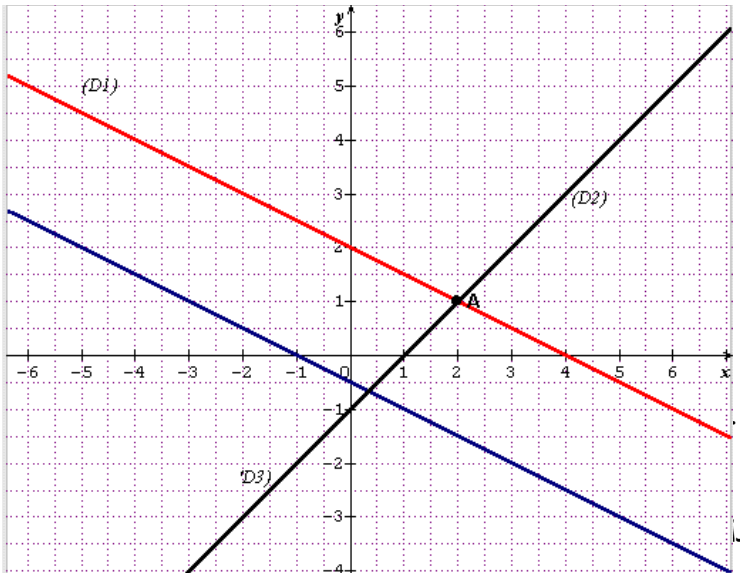
3) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية *(2 , 1)* ؟

(E_1) : $x+2y=4$ ولدينا : $2+2\times 1=4$

(E_2) : $x-y=1$ ولدينا : $2-1=1$

(E_3) : $x+2y=-1$ ولدينا : $2+2\times 1=4$

إذن الثنائية *(2 , 1)* تحقق كل من المعادلتين (E_1) و (E_2) ولا تحقق المعادلة (E_3) .



4) ماذا تعتبر النقطة *A(2 , 1)* بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) .

5) رسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

تعريف 1 : نسمي معادلة خطية ذات مجهولين كل معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث a و b و c أعداد معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

ملاحظات :

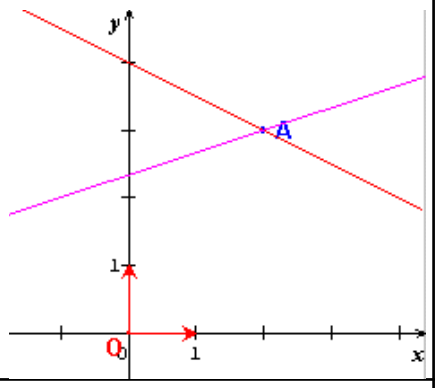
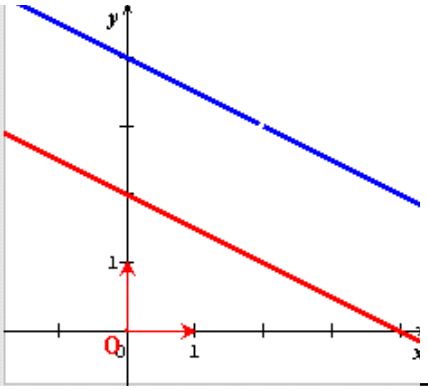
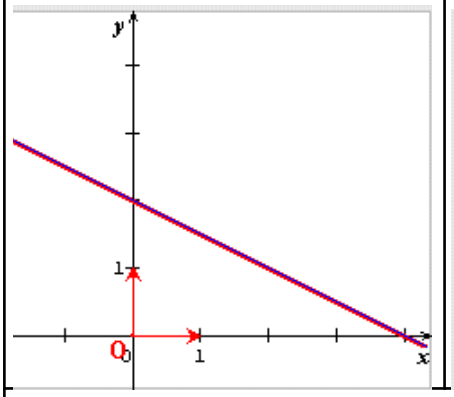
- كل معادلة مستقيم هي معادلة خطية ذات مجهولين حقيقيين
- نرمز إلى $\mathbb{R}^2$ مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية . الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلة خطية تسمى حلولها.
- إذا كانت $(a\ ;\ b) = (0\ ;\ 0)$ فإن : $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c = 0$ و Φ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c \neq 0$
- في كل معادلة خطية نعتبر أن $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ وتعتبر معادلة مستقيم.

تعريف 2 : نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة من الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a ، b ، c ، a' ، b' ، c أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين معناه إيجاد كل الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلتي الجملة في آن واحد.

ملاحظة : الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ حل للجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ معناه أن النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ هي نقطة من تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) الذين معادلتاهما $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ على الترتيب.

ثلاث حالات ممكنة لحل الجملة (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

(D) و (D') متقاطعان في النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا وهو الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$	(D) و (D') متوازيان تماما إذن الجملة (S) لا تقبل حلول .	(D) و (D') منطبقان إذن للجملة (S) ما لا نهاية من حلول .
		
في هذه الحالة : $ab'-ba' \neq 0$	في هاتين الحالتين لدينا : $ab'-ba'=0$	
$s=\{(\alpha\ ;\ \beta)\}$	$s=\Phi$	$s=\{(x\ ;\ y)/\ ax+by=c\}$

مبرهنة : (S) هي الجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

$ab'-ba' \neq 0$ معناه أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا

$ab'-ba'=0$ معناه إما الجملة (S) لا تقبل حلول و إما الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول.

تعريف 3 : العدد الحقيقي $ab'-ba'$ يسمى محدد الجملة (S) ونرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'$$

ونكتب :

تطبيق : 79 صفحة 278

لتكن جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 3x-y=5 \\ kx+y=11 \end{cases}$ ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد :

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-1)k = k+3$$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن : $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in \mathbb{R}-\{-3\}$

طرق حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

تمرين 78 صفحة 278 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

في كل مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثم مثل الحل بيانيا :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

الحل :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ $\ldots (S)$

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $-1\neq 2$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\,;4)\}$

- **طريقة الجمع :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3\ 0 = x-6$ معناه x

$= 2$ و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد $3\ 12 = y$ معناه

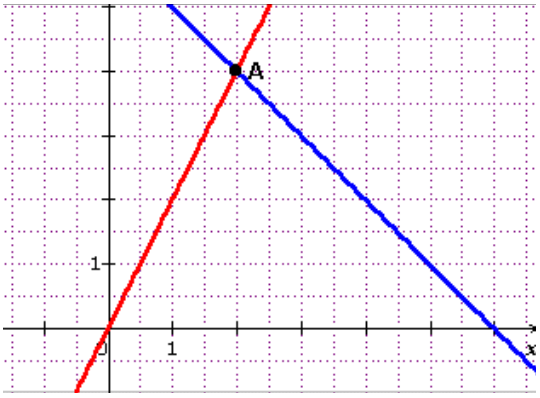
أن : $y = 4$ وبالتالي : $s=\{(2\,;4)\}$

- **طريقة المحدد :** $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ $\ldots (S)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 1(-2) = 3$ ومنه : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

وبالتالي : $s = \{(2\ ;\ 4)\}$



نضع : (D) : $x + y = 6$

و (D') : $-2x + y = 0$

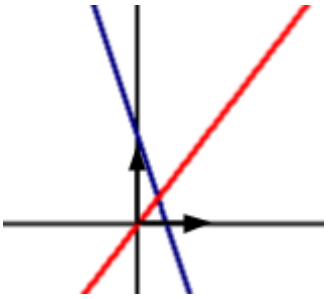
ب) $\begin{cases} x\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}y = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6} - 2y = 0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$

المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x = \frac{19\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{-2(2\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$



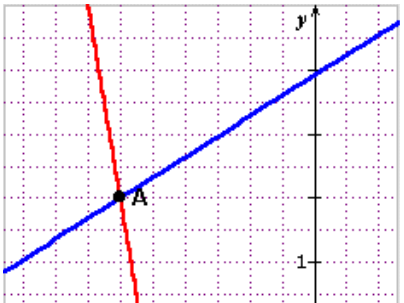
$y = \dfrac{19\sqrt{3} - 24}{13}$ وبالتالي : $s = \left\{\left(\dfrac{19\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{13}\ ;\ \dfrac{19\sqrt{3} - 24}{13}\right)\right\}$.

نضع : (D) : $x\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}y = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و (D') : $x\sqrt{6} - 2y = 0$

ج) $\begin{cases} -7x + 11y = 43 \\ 6x + y = -16 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 66 = -73$

إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :



$$x=\frac{\begin{vmatrix}43 & 11\\ -16 & 1\end{vmatrix}}{-73} \quad \text{و} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}-7 & 43\\ 6 & -16\end{vmatrix}}{-73}$$ أي :

$$x=\frac{43+176}{-73}=-\frac{219}{73}=-3 \quad \text{و} \quad y=\frac{112-258}{-73}=\frac{146}{73}=2$$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$

نضع : (D) : $-7x+11y=43$ و (D') : $6x+y=-16$

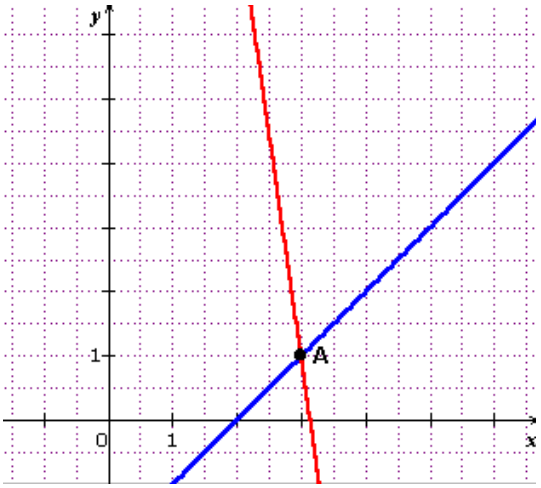
د) $\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\ y=-7x+22\end{cases}$

بما أن : $-7\neq 1$ فإن للجملة حل وحيد .

$\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\ x-2=-7x+22\end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases}y=x-2\\ 8x=24\end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases}x=3\\ y=3-2\end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\ ;\ 1)\}$



$$\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$$

تمرين 80 صفحة 278 لتكن الجملة (S) :

1) بين أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

2) ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) ما لانهاية من الحلول.

الحل :

1) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases}y=2x-6\\ y=2x+\frac{1}{3}k\end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -6 & 3\end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

2) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k=-18$.