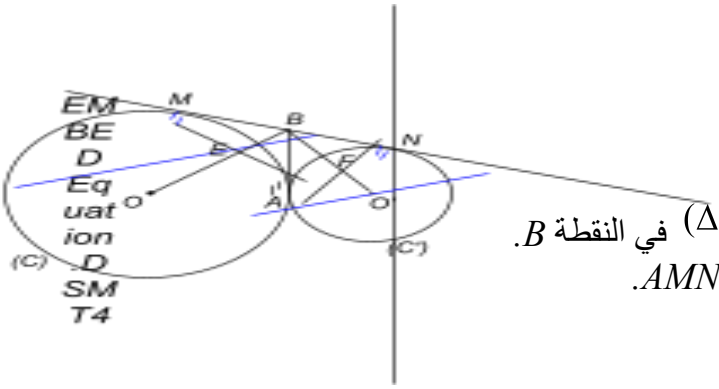
نص المسألة :

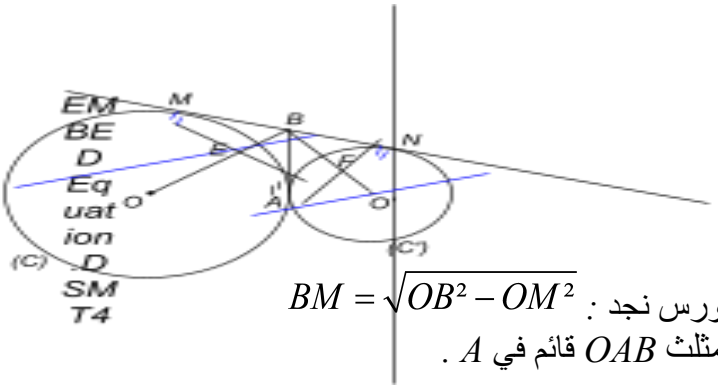


(C) و (C') مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما $6\ cm$ و $2\ cm$ على الترتيب، ومتماستان خارجيا في النقطة A.

(Δ) مماس مشترك لهما خارجيا في النقطتين M و N على الترتيب. المماس المشترك لهما في النقطة A يقطع (Δ) في النقطة B.

1. بين أن $BA = BM = BN$ واستنتج نوع المثلث AMN.
2. ما نوع المثلث BOO' ؟ برر جوابك.
3. أحسب MN (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$)
4. أحسب قيس الزاوية $B\hat{O}O'$ واستنتج الأقياس $M\hat{N}A$ ، $B\hat{O}'O$ ، $A\hat{M}N$.
5. نسمي E نقطة تقاطع (AM) ، (OB) و F نقطة تقاطع (AN) ، $(O'B)$. ما نوع الرباعي $AFBE$ ؟ أحسب مساحته (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$)
6. بين أن : $(NO) // (MO')$.

الحل :



1. تبيان أن $BA = BM = BN$

الطريقة 1 :

بما أن (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة M

فإن المثلث OMB قائم في M .فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد : $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2}$

بما أن (AB) مماس للدائرة (C) في النقطة A فإن المثلث OAB قائم في A .

فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد : $BA = \sqrt{OB^2 - OA^2}$

ولدينا : $OA = OM$ (من الدائرة (C)) إذن : $BM = BA$ . . . (1)

وبنفس الطريقة السابقة نجد : $BN = BA$ . . . (2) ومن (1) و (2) نجد : $BA = BM = BN$

الطريقة 2 :

لدينا : $A\hat{M}B = M\hat{A}B$ (تحصران نفس القوس AM في الدائرة (C)) ومنه المثلث ABM متساوي الساقين.

إذن : $BM = BA$ . . . (1)

ولدينا : $A\hat{N}B = N\hat{A}B$ (تحصران نفس القوس AN في الدائرة (C')) ومنه المثلث ABN متساوي الساقين.

إذن : $BN = BA$ . . . (2)

ومن (1) و (2) نجد : $BA = BM = BN$

الطريقة 3 : مقارنة بين المثلثين OAB و OMB و كذلك بين المثلثين $O'AB$ و $O'NB$.

- استنتاج نوع المثلث AMN.

نستنتج أن النقط N ، M ، A تنتمي إلى الدائرة ذات المركز B منتصف $[MN]$ ومنه المثلث AMN قائم في A.

2. نوع المثلث BOO' :

لدينا : $BA = BM = BN$ إذن : (OB) محور $[AM]$ و $(O'B)$ محور $[AN]$

وبما أن $(AM) \perp (AN)$ فإن : $(OB) \perp (O'B)$ وبالتالي : المثلث BOO' قائم في B.

3. حساب MN (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$):

المثلث BOO' قائم في B و $[BA]$ العمود المتعلق بالوتر $[OO']$ إذن : $BA^2 = AO \times AO'$

ومنه : $BA^2 = 6 \times 2 = 12$ وبالتالي : $BA = 2\sqrt{3}cm$ ومنه : $MN = 4\sqrt{3}cm$ أي : $MN \approx 6,93cm$

4. حساب قيس الزاوية $B\hat{O}O'$:

في المثلث القائم BOO' لدينا : $OA = 6\ cm$ و $BA = 2\sqrt{3}cm$ إذن : $\tan B\hat{O}A = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $B\hat{O}A = 30°$ أي : $B\hat{O}O' = 30°$

- استنتاج الأقياس $B\hat{O}'O$ ، $M\hat{N}A$ ، $A\hat{M}N$.

نستنتج أن : $B\hat{O}'O = 60°$ لأن $B\hat{O}O'$ و $B\hat{O}'O$ متتامتان.

لدينا : *(OB)* محور *[AM]* إذن *[OB]* هو منصف الزاوية $M\hat{O}A$ وهي زاوية مركزية تحصر القوس MA

و الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس هي $A\hat{M}B$ ومنه $A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{0}M = A\hat{O}B = 30°$

أي : $A\hat{M}N = 30°$ و لدينا : $M\hat{N}A$ ، $A\hat{M}N$ متتامتان إذن : $M\hat{N}A = 60°$

5. نسمي E نقطة تقاطع *(AM)* ، *(OB)* و F نقطة تقاطع *(AN)* ، *(O'B)*.

- نوع الرباعي $AFBE$:

لدينا : $(AM) \perp (AN)$ و $(OB) \perp (O'B)$ و *(OB)* محور *[AM]* إذن الرباعي $AFBE$ هو مستطيل.

- حساب مساحة الرباعي $AFBE$ *(تعطى القيمة مدورة إلى 0,01)* :

لدينا : $A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{0}M = A\hat{O}B = 30°$ أي : $A\hat{0}M = 60°$ ومنه المثلث OMA متقايس الأضلاع

وبالتالي : $AM = 6\ cm$ ومنه : $AE = \frac{1}{2}AM = 3cm$

ولدينا : $B\hat{N}A = 60°$ ومنه المثلث BNA متقايس الأضلاع إذن: $NA = 2\sqrt{3}cm$ ومنه: $AF = \frac{1}{2}AN = \sqrt{3}cm$

وبالتالي مساحة الرباعي $AFBE$ هي : $s = 2\sqrt{3} \times 3cm^2$ بالتدوير : $s \approx 5,20cm^2$

6. تبيان أن : *(NO) // (MO')*.