ABC مثلث متقايس الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعه a ، D نقطة من $[AB]$ حيث : $AB = 3\,AD$ ،
F ، E نقطتان من $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب حيث : $BE = CF = AD$.

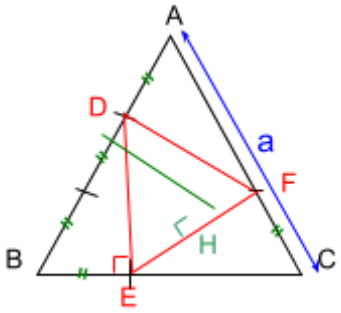
1) ما نوع المثلث DEF.

2) بين أن (DE) عمودي على (BC).

3) أحسب مساحة كل من المثلثين ABC و DEF بدلالة a ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

الحل :

1) نوع المثلث DEF.



لدينا : $BE = CF = AD = \frac{1}{3}a$ و $BD = EC = AF = \frac{2}{3}a$

وبما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن : $\hat{B} = \hat{C} = \hat{A} = 60°$

ومنه المثلثات ADF ، CEF ، BDE متقايسة و بالتالي :

$ED = EF = DF$ إذن المثلث DEF متقايس الأضلاع.

2) تبيان أن (DE) عمودي على (BC).

لدينا : $\hat{B} = 60°$ ومنه : $\cos\hat{B} = \frac{1}{2}$ ولدينا : $\frac{BE}{BD} = \frac{1}{2}$ إذن : $\cos\hat{B} = \frac{BE}{BD}$ ومنه المثلث BED قائم في E

وبالتالي : (DE) عمودي على (BC).

3) حساب مساحة كل من المثلثين ABC و DEF بدلالة a ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على (EF).

ولدينا : $DE^2 = BD^2 - BE^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2$ ومنه : $DE = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

وكذلك $DH^2 = DE^2 - EH^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ ومنه $DH = \frac{1}{2}a$

نضع s المساحة ومنه : $s(DEF) = \frac{1}{2}DE \times DH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

$$s(ABC) = 3s(BED) + s(DEF) = 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

ومنه : $s(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ومنه : $s(ABC) = 3\,s(DEF)$.