II)مؤشرات سلسلة إحصائية :

1) المدى :

التعريف : المدى لسلسة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Max-Min 4						

ملاحظة : [illegible] ميزة مستمرة المدى هو الفرق بين أكبر مركز وأصغر مركز للفئات .

2) المنوال والفئة المنوالية:

تعريف : نسمي منوالا لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع كل قيمة للميزة التي لها أكبر تكرار .

ونسمى فئة منوالية لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر كل فئة التي لها أكبر تكرار .

ملاحظة : يمكن لسلسلة إحصائية أن يكون لها عدة مناول أو فئات منوالية .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Mod = 2						

3) الوسيط :

نشاط : نأخذ عددا من التلاميذ ونرتبهم حسب قاماتهم ثم نعرف الوسيط .

التعريف : الوسيط لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

ونرمز له بالرمز Med

مثال : نعتبر القيم : 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 ، 6 ، 7 ، 7 .

$$Med = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

مبرهنة : N تكرار الكلي لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع قيمه مرتبة تصاعديا أو تنازليا .

إذا كان N فرديا فإن الوسيط هو قيمة الميزة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ (أي Med يقع في الرتبة $\frac{N+1}{2}$) .

إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين للميزة التين رتبتيهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.

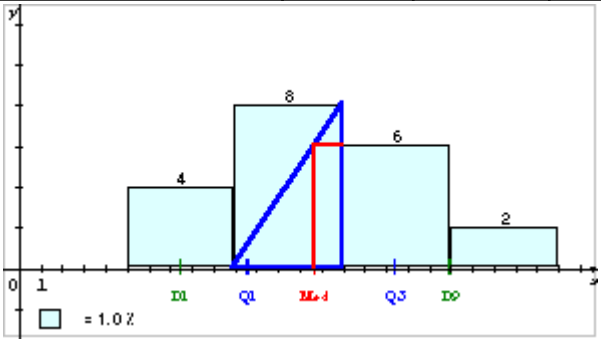
مثال : نفرض 31 هو تكرار مجتمع فإن رتبة الوسيط هي $\frac{31+1}{2}=16$.

نفرض أن 30 هو تكرار مجتمع فإن $Med = \frac{x_{15}+x_{16}}{2}$ حيث x_{15} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 15 و x_{16} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 16 .

طريقة إيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر .

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات متساوية الطول :

الفئة (باللتر)	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	$[20;25[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20



توجد 20 بقرة مرتبة حسب إنتاجها من $5l$ إلى $22l$.

البقرة التي تتوسط المجتمع تكون في المرتبة 10

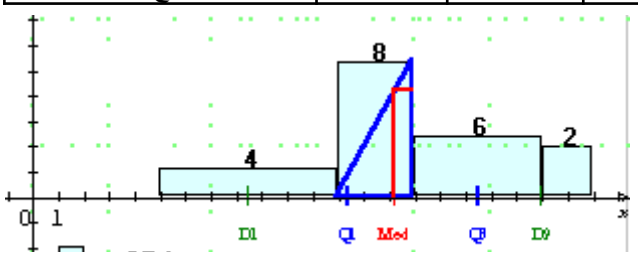
وبالتالي يكون إنتاجها في الفئة $[10;15[$ والتي تسمى الفئة الوسيطية .

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من Med هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{Med-10}{5}=\frac{6}{8}$

ومنه: $Med = 10+3,75 = 13,75$.

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات مختلفة الطول:

الفئة (باللتر)	$[5;12[$	$[12;15[$	$[15;20[$	$[20;22[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20



في هذه الحالة الفئة الوسيطية هي $[12;15[$

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من Med هو :

$$\frac{Med-12}{3}=\frac{6}{8}$$

$10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

ومنه: $Med=12+2.25=14.25l$

خلاصة : لإيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر ، نحدد أولا الفئة الوسيطية $[a\,;\,b[$ وتكرارها n_m ثم نحسب الوسيط بالعلاقة

$$Med=a+\frac{(b-a)\left(\frac{n}{2}-N_c\right)}{n_m}$$

حيث N_c هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية .

تمرين : في مؤسسة أشغال الغابات ، الدراسة الإحصائية لأقطار 50 شجرة أعطت النتائج التالية .

x_i	[7 ، 7,5[	[7,5 ، 8[	[8 ، 8,5[	[8,5 ، 9[	[9 ، 9,5[	[9,5 ، 10[	[10 ، 10,5[	
n_i	5	7	12	10	6	4	6	50

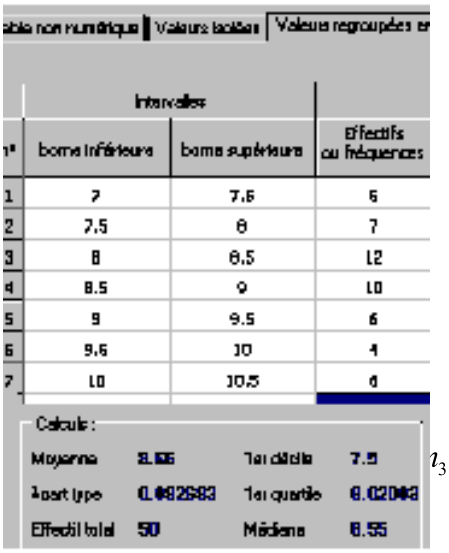
1. أكمل الجدول بالتكرار المجمع الصاعد ثم أحسب وسيط هذه السلسلة
2. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة .

الحل :

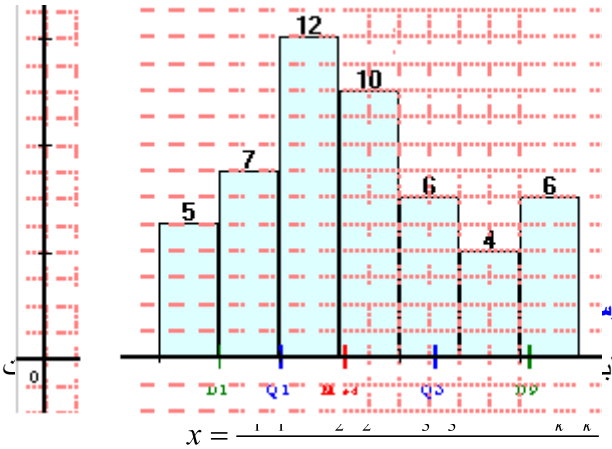
x_i	[7 ، 7,5[	[7,5 ، 8[	[8 ، 8,5[	[8,5 ، 9[	[9 ، 9,5[	[9,5 ، 10[	[10 ، 10,5[	
n_i	5	7	12	10	6	4	6	50
	5	12	24	34	40	44	50	

رتبة الوسيط هي 25 ويكون في الفئة الوسيطية $[8,5\,;\,9[$ ومنه : $Med=8,5+0,5\times\frac{25-24}{10}=8,55\,cm$

حساب الوسيط باستعمال البرمجيات :



4) **الوسط الحسابي** لسلسلة إحصائية قيمها x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . ، x_k وتكراراتها n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . ، n_k على الترتيب هو العدد المعرف بـ :



$$x=\frac{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}$$

تمرين : أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات التالية :

x_i	8	10	12
n_i	1	1	1

x_i	7	10	13
n_i	3	1	2

x_i	1	2	18	19
n_i	1	1	10	18

x_i	4	7	8	10	13	17	18
n_i	1	2	1	3	1	2	1

ملاحظة 1 : كل من الوسيط والمنوال والوسط الحسابي ، يسمى مؤشر الموقع .

ملاحظة 2 :

الوسط الحسابي لسلسلة ذات طبع إحصائي مستمر يعرف بنفس العلاقة السابقة حيث نعوض القيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . ، x_k بمراكز الفئات c_1 ، c_2 ، c_3 ، . . . ، c_k

تمرين : أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات الآتية :

x_i	[8 ، 12[	[12 ، 16[	[16 ، 20[	[20 ، 24[	
n_i	5	7	6	2	20
c_i					

	[7 ، 7,5[	[7,5 ، 8[	[8 ، 8,5[	[8,5 ، 9[	[9 ، 9,5[	[9,5 ، 10[	[10 ، 10,5[	
n_i	5	7	12	10	6	4	6	50
c_i								
$n_i \times c_i$								

ملاحظة 3 :

المجموع : $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ يكتب على الشكل $\sum_{i=1}^{i=k} n_i$ ويقرأ مجموع الأعداد n_1 من $i=1$ إلى $i=k$

تطبيق 24 صفحة 176 :

1. أكتب المجاميع التالية باستعمال الرمز Σ :

$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ $\quad$ $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$ $\quad$ $5 + 9 + 13 + 17$

2. أحسب المجموعين : $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)$ ؛ $\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}$

الحل :

1. $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{i=2}^{i=5} i^3$ $\quad$ $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = \sum_{i=2}^{i=7} 3^i$ $\quad$ $5 + 9 + 13 + 17 = \sum_{i=1}^{i=4}(4i+1)$.

2. $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2) = (3\times 0-2)+(3\times 1-2)+(3\times 2-2)+(3\times 3-2)+(3\times 4-2) = -2+1+4+7+10 = 20$

$$\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)} = \frac{2}{3(1+1)} + \frac{2}{3\times 2(2+1)} + \frac{2}{3\times 3(3+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{6+2+1}{18} = \frac{1}{9}$$

خواص الوسط الحسابي :

الخاصية 1: x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ، x_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتواترات f_1 ، f_2 ، f_3 ، ... ، f_k على الترتيب

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\bar{x}$ حيث : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_kx_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_ix_i$

البرهان : بما أن $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$ فإن : $f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_kx_k = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i} = \bar{x}$.

الخاصية 2 : x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ، x_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، n_k على الترتيب و $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة .

$\overline{x+a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة x_1+a ، x_2+a ، x_3+a ، ... ، x_k+a مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، n_k على الترتيب . و $\overline{x\times a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة $x_1\times a$ ، $x_2\times a$ ، $x_3\times a$ ، ... ، $x_k\times a$ مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، n_k على الترتيب . ولدينا : $\overline{x+a} = \bar{x}+a$ و $\overline{x\times a} = \bar{x}\times a$.

الخاصية 3 :

x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ، x_k ، y_1 ، y_2 ، y_3 ، ... ، y_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، n_k ، n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، ... ، n'_k على الترتيب و نحسب $\bar{X}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة بالعلاقة :

$$\bar{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\bar{x} + \left(\sum_{i=1}^{k} n'_i\right)\bar{y}}{n}$$

حيث:

$\bar{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ، x_k المرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، n_k على الترتيب.

$\bar{y}$ الوسط الحسابي للسلسلة y_1 ، y_2 ، y_3 ، . . . ، y_k المرفقة بالتكرارات n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، . . . ، n'_k على الترتيب.

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} n'_i$ التكرار الكلي للسلسلة .

تمرين : في ثانوية ، جدع مشترك علوم يتمثل في ثلاث أقسام وكان المعدل السنوي لكل من :
قسم ج م ع 1 ذي 45 تلميذ هو 11,23 ؛ قسم ج م ع 2 ذي 42 تلميذ هو 13,13 ؛ قسم ج م ع 3 ذي 37 تلميذ هو 10,33 .
أحسب معدل جدع مشترك علوم .

تمرين : 49 صفحة 179

1) أحسب المعدل $\bar{x}$ للأعداد 7 ؛ 5 ؛ 3 ؛ 9 ؛ 3 ؛ 5 .
2) أحسب المعدل $\bar{y}$ الذي تتحصل عليه عندما تطرح 3 من كل عدد من الأعداد السابقة . جد علاقة بين $\bar{x}$ و $\bar{y}$.
3) أحسب المعدل $\bar{z}$ الذي تتحصل عليه عندما تضرب في 10 كل عدد من الأعداد السابقة . جد علاقة بين $\bar{x}$ و $\bar{z}$.

تمرين 50 صفحة 180

أحسب الوسط الحسابي للأعداد : 3,897202 ؛ 3,897201 ؛ 3,897204 ؛ 3,897203 .