نشاط 2 :

في المستقيم العددي (O , I) نعتبر النقطتين A و B فاصلتيهما (-2) و 3 على الترتيب و M ذات الفاصلة x نقطة متغيرة على القطعة $[AB]$. S هي مساحة المربع الذي ضلعه OM

1) عين المجموعة D التي يتغير فيها العدد الحقيقي x .

2) أحسب بدلالة x العبارة $f(x)=\frac{1}{2}S-2\overline{AM}+AB$.

3) أملئ الجدول ثم في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، مثل النقط $M(x , f(x))$ حيث x تأخذ القيم المعطاة في الجدول

x	-2	-1.8	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$												

4) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D فإن $f(x)-f(2)\geq 0$ استنتج حصرا للعدد $f(x)$ عندما يكون $x\in D$ ما القول عن القيمتين $f(-2)$ و $f(2)$.

5) ليكن a و b عددان من المجموعة D حيث $a>b$.

- أثبت أن $f(a)-f(b)=(a-b)[\frac{1}{2}(a+b)-2]$
- أعط حصرا للعدد $[\frac{1}{2}(a+b)-2]$ في حالة a و b عددان من المجال $[-2 ; 2]$ ثم في حالة a و b عددان من المجال $[2 ;3]$
- قارن بين $f(a)$ و $f(b)$.

6) أتمم منحنى الدالة f على المجموعة D .

حل النشاط :

1) تعيين المجموعة D التي يتغير فيها العدد الحقيقي x :

$D=[-2 ; 3]$ و هي مجال .

2) حساب بدلالة x العبارة $f(x)=\frac{1}{2}S-2\overline{AM}+AB$.

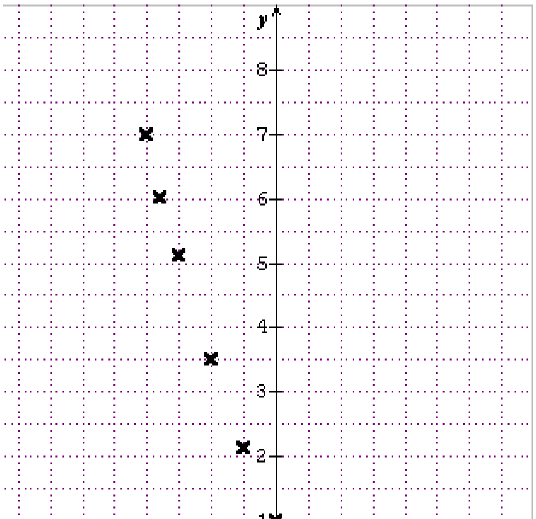
$f(x)=\frac{1}{2}S-2\overline{AM}+AB$ تكافئ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2(x+2)+5$

وبعد التبسيط نحصل على : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$

3) الجدول :

x	-2	-1.8	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	7	6.03	5.13	3.5	2.13	1	0.13	-0.5	-0.88	-1	-0.88	-0.5

- تمثيل النقط :



4) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D فإن: $f(x)-f(2)\geq 0$ استنتج حصرا للعدد $f(x)$ عندما يكون $x\in D$ ما القول عن القيمتين $f(-2)$ و $f(2)$.

$$f(x)-f(2)=\frac{1}{2}x^2-2x+2=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D فإن :

$f(x)-f(2)\geq 0$ أي $f(x)\geq f(2)$ وبالتالي :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D $-1\leq f(x)\leq 7$

ومنه $f(2)$ هي أصغر قيمة

و $f(-2)$ هي أكبر قيمة التين تبلغهما الدالة f على المجال D .

5) ليكن a و b عددان من المجموعة D حيث $a>b$.

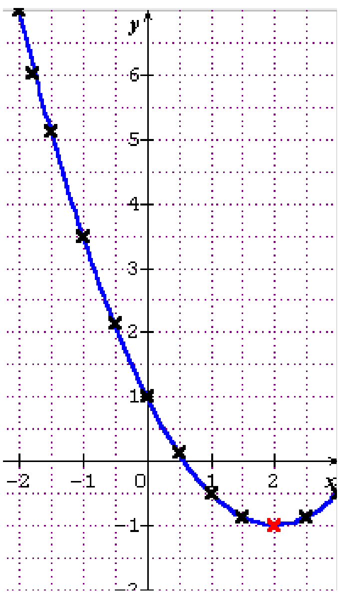
- أثبت أن $f(a)-f(b)=(a-b)[\frac{1}{2}(a+b)-2]$

$$f(a)-f(b)=[\frac{1}{2}a^2-2a+1]-[\frac{1}{2}b^2-2b+1]=\frac{1}{2}(a^2-b^2)-2(a-b)=(a-b)[\frac{1}{2}(a+b)-2]$$

- أعط حصرا للعدد $[\frac{1}{2}(a+b)-2]$ في حالة a و b عددان من المجال $[-2\ ;\ 2]$ ثم في حالة a و b عددان من المجال $[2\ ;\ 3]$

نفرض أن a و b عددان من المجال $[-2\ ;\ 2]$ معناه : $-2\leq a\leq 2$ و $-2\leq b\leq 2$ ومنه $-4\leq a+b\leq 4$ بما أن $a\neq b$ فإن : $-4<a+b<4$ معناه : $-2<\frac{1}{2}(a+b)<2$ ومعناه : $-4<\frac{1}{2}(a+b)-2<0$

نفرض أن a و b عددان من المجال $[2\ ;\ 3]$ معناه : $2\leq a\leq 3$ و $2\leq b\leq 3$ ومنه $4\leq a+b\leq 6$ بما أن $a\neq b$ فإن : $4<a+b<6$ معناه : $2<\frac{1}{2}(a+b)<3$ ومعناه : $0<\frac{1}{2}(a+b)-2<1$



- قارن بين $f(a)$ و $f(b)$.

من أجل كل عددين a و b من المجال $[-2\ ;\ 2]$ فإن :

$a>b$ و $-4<\frac{1}{2}(a+b)-2<0$

إذن : $f(a)-f(b)<0$ وبالتالي : $f(a)<f(b)$

من أجل كل عددين a و b من المجال $[2\ ;\ 3]$ فإن :

$a>b$ و $0<\frac{1}{2}(a+b)-2<1$ إذن :

$f(a)-f(b)>0$ وبالتالي : $f(a)>f(b)$

6) أتمم منحنى الدالة f على المجموعة D .

3. القيم الحدية لدالة :

تعريف 1 : f دالة معرفة على مجال I . القيمة الحدية للدالة f على مجال I هي أكبر أو أصغر صورة تبلغها f على هذا مجال.

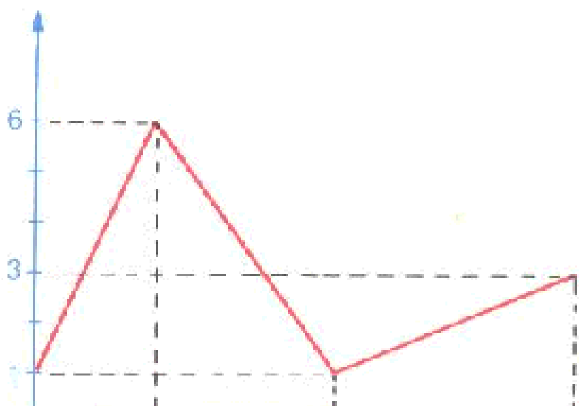
تعريف 2 : f دالة معرفة على مجال I و a عدد حقيقي من المجال I ، نقول عن $f(a)$ أنها **قيمة حدية عظمى** للدالة f على I إذا كان من أجل كل x من I : $f(x)\leq f(a)$.

تعريف 3 : f دالة معرفة على مجال I و a عدد حقيقي من المجال I ، نقول عن $f(a)$ أنها **قيمة حدية صغرى** للدالة f على I إذا كان من أجل كل x من I : $f(x)\leq f(a)$.

مثال : f الدالة المعرفة على المجال $[0\ ;\ 9]$ بتمثيلها

ما هي القيم الحدية للدالة f على كل مجال من المجالات التالية

$[0\ ;\ 9]$ ؛ $[0\ ;\ 2]$ ؛ $[2\ ;\ 5]$ ؛ $[2\ ;\ 9]$ ؟



حل المثال :

على المجال $[0\ ;\ 9]$ ، توجد قيمتين حديتين ، هما 1 قيمة حدية صغرى عند كل من 0 و 5 ، و 6 قيمة حدية كبرى عند 2 .

على المجال $[0\ ;\ 2]$ ، توجد قيمتين حديتين ، هما 1 قيمة حدية صغرى عند 0 ، و 6 قيمة حدية كبرى عند 2 .

على المجال $[2\ ;\ 5]$ ، توجد قيمتين حديتين ، هما 1 قيمة حدية صغرى عند 5 ، و 6 قيمة حدية كبرى عند 2 .

على المجال $[2\ ;\ 9]$ ، توجد قيمتين حديتين ، هما 1 قيمة حدية صغرى عند 5 ، و 6 قيمة حدية كبرى عند 2 .

تمرين 47 صفحة 77 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=x^3+3x^2-2$

بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[0\ ;\ +\infty[$ عند 0 .

الحل : لدينا $f(0)=-2$ ومنه $f(x)-f(0)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\ ;\ +\infty[$: $x^2\geq 0$ و $x+3>0$ ومنه : $x^2(x+3)\geq 0$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\ ;\ +\infty[$: $f(x)-f(0)\geq 0$

وبالتالي : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\ ;\ +\infty[$: $f(x)\geq f(0)$

4. اتجاه تغير دالة على مجال :

تعريف : f دالة معرفة على مجال I من المجموعة $\mathbb{R}$.

- f متزايدة تماما على المجال I يعني :

من أجل كل عددين a و b من المجال I ، إذا كان $a<b$ فإن $f(a)<f(b)$

- f متناقصة تماما على المجال I يعني :

من أجل كل عددين a و b من المجال I ، إذا كان $a<b$ فإن $f(a)>f(b)$

- f ثابتة على المجال I يعني: من أجل كل a و b من المجال I ، إذا كان $a<b$ فإن $f(a)=f(b)$
- f متزايدة على المجال I يعني :

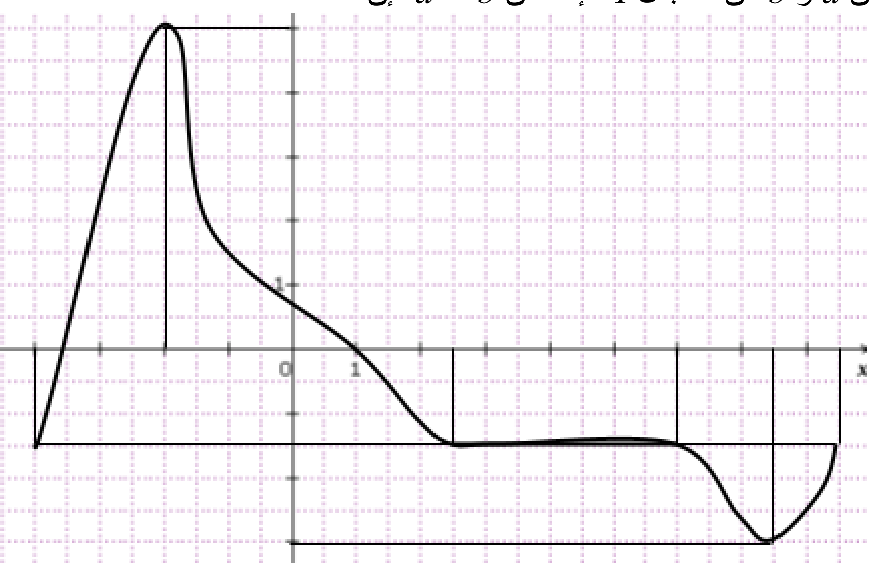
من أجل كل عددين a و b من المجال I ، إذا كان $a<b$ فإن $f(a)\leq f(b)$

- f متناقصة على المجال I يعني :

من أجل كل عددين a و b من المجال I ، إذا كان $a<b$ فإن $f(a)\geq f(b)$

مثال : الدالة f المعرفة على المجال $[-4\ ;\ \frac{17}{2}]$ بالتمثيل البياني الآتي :

أذكر اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من المجالات التالية : $[-4\ ;\ -2]$ ؛ $[-2\ ;\ 1]$ ؛ $[-2\ ;\ 6]$ ؛ $[-2\ ;\ \frac{15}{2}]$ ؛ $[\frac{5}{2}\ ;\ 6]$ ؛ $[\frac{15}{2}\ ;\ \frac{17}{2}]$



حل المثال :

على المجال $[-4\ ;\ -2]$ الدالة f متزايدة تماما.

على المجال $[-2\ ;\ 1]$ الدالة f متناقصة تماما.

على المجال $[-2\ ;\ 6]$ الدالة f متناقصة.   على المجال $[-2\ ;\ \frac{15}{2}]$ الدالة f متناقصة.

على المجال $[\frac{5}{2}\ ;\ 6]$ الدالة f ثابتة.   على المجال $[\frac{15}{2}\ ;\ \frac{17}{2}]$ الدالة f متزايدة تماما.

ملاحظات :

- إذا كانت $f(a)$ و $f(b)$ في نفس الترتيب للعددين a و b فإن الدالة f تكون متزايدة تماما .(الدالة f تحفظ الترتيب)
- إذا كانت $f(a)$ و $f(b)$ ليس في نفس الترتيب للعددين a و b فإن الدالة f تكون متناقصة تماما .(الدالة f تعكس الترتيب)
- نعني بدراسة اتجاه تغير دالة ، تعيين المجالات التي تكون فيها هذه الدالة متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو ثابتة

في المثال السابق نلخص اتجاه تغير الدالة f في الجدول التالي :

x	-4	-2	$\frac{5}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$ ↗	5 ↘	$-\frac{3}{2}$ →	$-\frac{3}{2}$ ↘	-3 ↗	$-\frac{3}{2}$

تطبيق :

بين أن الدالة f المعرفة على المجموعة ℝ بالشكل : $f(x) = 3x - 5$ ، متزايدة تماما على ℝ .

حل التطبيق :

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$:

$f(a) - f(b) = 3a - 3b = 3(a - b)$ وبما أن : $a < b$ فإن : $a - b < 0$ ومنه $f(a) - f(b) < 0$

معناه $f(a) < f(b)$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على ℝ .

ملاحظة :

في كل حالة لدينا $a < b$ ومنه : $a \neq b$ ، نضع $\theta = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ العبارة θ تسمى **نسبة تزايد** الدالة f .

مبرهنة : f دالة معرفة على مجال I.تكون الدالة f :

متزايدة تماما على المجال I تكافئ θ موجبة تماما من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I.

متناقصة تماما على المجال I تكافئ θ سالبة تماما من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I.

متزايدة على المجال I تكافئ θ موجبة من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I.

متناقصة على المجال I تكافئ θ سالبة من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I.

ثابتة على المجال I تكافئ θ معدومة من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I.

تمرين : 45 صفحة 77

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[1\ ;\ +\infty[$ بالشكل : $f(x) = (x-1)^2 - 1$

الحل :

ليكن x و x' عددين من المجال $[1 \; ; \; +\infty[$ حيث : $x \neq x'$

$$\theta_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{(x-1)^2 - (x'-1)^2}{x - x'} =$$

$$\theta_f = \frac{(x - 1 - x' + 1)(x - 1 + x' - 1)}{x - x'} = \frac{(x - x')(x + x' - 2)}{x - x'} \qquad \theta_f = x + x' - 2$$

لدينا : $x \in [1 \; ; \; +\infty[$ و $x' \in [1 \; ; \; +\infty[$ و $x \neq x'$ إذن : $(x + x') \in]2 \; ; \; +\infty[$

ومنه : $(x + x' - 2) \in]0 \; ; \; +\infty[$ وبالتالي : $\theta_f > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1 \; ; \; +\infty[$

x	1	10	100	1000	10000
$f(x$	-1	80	9800	998000	99980000

ومنه جدول تغيرات f :

.x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
.$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$