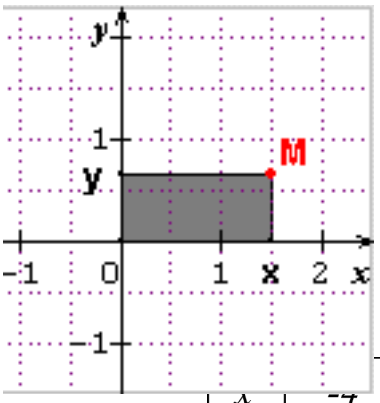
II) الدالة مقلوب



نشاط : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
في الشكل المقابل $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي لا تنتمي إلى محوري المعلم
حيث مساحة المستطيل الملون هي 1 وحدة المساحات

1) ما هي مجموعة قيم x الممكنة ؟ وما هي مجموعة قيم y الممكنة ؟
2) أكتب y بدلالة x .
3) نعرف الدالة f بالشكل : $f : x \mapsto y$ حيث x و y لهما نفس الإشارة .
ما هي مجموعة تعريف الدالة f
4) أملئ الجدول الآتي :

x	-4	-3	-2	-1	0.5	1	2	4
$f(x)$								

5) مثل في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ النقط $M(x\ ;\ f(x))$ حيث x تأخذ القيم المعروضة في الجدول .
6) أدرس اتجاه تغير الدالة f .
7) أدرس شفعية الدالة f .
8) أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم السابق .

حل النشاط :

1) ما هي مجموعة قيم x الممكنة ؟ وما هي مجموعة قيم y الممكنة ؟

بما أن $M(x\ ;\ y)$ لا تنتمي إلى محور التراتيب فإن $x \neq 0$ ومعناه أن قيم x الممكنة هي كل قيم $\mathbb{R}^*$ أي $x \in \mathbb{R}^*$
بما أن $M(x\ ;\ y)$ لا تنتمي إلى محور الفواصل فإن $y \neq 0$ ومعناه أن قيم y الممكنة هي كل قيم $\mathbb{R}^*$ أي $y \in \mathbb{R}^*$

2) كتابة y بدلالة x . لدينا مساحة المستطيل الملون هي $|x| \times |y| = 1$ معناه $|y| = \dfrac{1}{|x|}$

ومعناه أنه : إذا كان $y \in \mathbb{R}_+^*$ فإن : $y = \dfrac{1}{|x|}$ و إذا كان $y \in \mathbb{R}_-^*$ فإن : $y = -\dfrac{1}{|x|}$

3) نعرف الدالة f بالشكل : $f : x \mapsto y$ حيث x و y لهما نفس الإشارة .
ما هي مجموعة تعريف الدالة f ؟ ثم أكتب عبارة $f(x)$.

مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

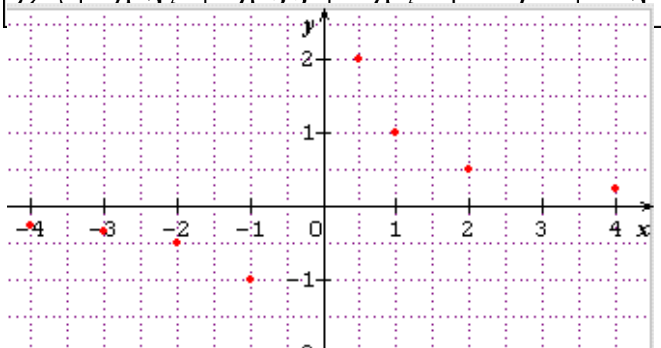
لدينا: إذا كان $y \in \mathbb{R}_+^*$ فإن : $y = \dfrac{1}{|x|}$ بما أن x و y لهما نفس الإشارة فإن $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

لدينا: إذا كان $y \in \mathbb{R}_-^*$ فإن : $y = -\dfrac{1}{|x|}$ بما أن x و y لهما نفس الإشارة فإن $x \in \mathbb{R}_-^*$ ومنه : $f(x) = -\dfrac{1}{-x}$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

4) أملاء الجدول :

x	-4	-3	-2	-1	0.5	1	2	4
$f(x)$	-0.25	-0.33	-0.5	-1	2	1	0.5	0.25



5) مثل في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ النقط $M(x\ ;\ f(x))$
حيث x تأخذ القيم المعروضة في الجدول .

6) أدرس اتجاه تغير الدالة f.

لدينا x و $f(x)$ لهما نفس الاشارة

لدينا : إذا كان a و b عددان من المجال $]0 ; +\infty[$

فإن : $a > b$ معناه $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ أي : $f(a) < f(b)$

و إذا كان a و b عددان من المجال $]-\infty ; 0[$ فإن : $a > b$ معناه $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ أي : $f(a) < f(b)$

إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0 ; +\infty[$ و $]-\infty ; 0[$.

x	$-\infty$ $+\infty$	0	$+$
$f(x)$	↘	‖	↘

7) أدرس شفعية الدالة f.

لدينا كل عناصر المجموعة D^* متناظرة بالنسبة إلى العدد 0

أي من أجل كل $x \in D^*$ فإن $-x \in D^*$

ولدينا : من أجل كل $x \in D^*$: $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

أي $f(-x) = -f(x)$ ومنه الدالة f فردية.

8) إنشاء المنحنى الممثل للدالة f في المعلم السابق .

التعريف : الدالة مقلوب هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي غير معدوم مقلوبه

ونكتب : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ أو $f(x) = \frac{1}{x}$

ملاحظات :

- الدالة مقلوب معرفة على المجموعة $D^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
- كل عدد حقيقي x غير معدوم له نفس إشارة صورته بالدالة مقلوب.

مبرهنة : الدالة مقلوب هي دالة متناقصة تماما وموجبة على المجال $]0 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما وسالبة على المجال $]-\infty ; 0[$

خاصية : الدالة مقلوب المعرفة على كل مجموعة عناصرها متناظرة بالنسبة إلى 0 هي دالة فردية ومنحنيها الممثل في معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ هذا المعلم.

تعريف : منحني الدالة مقلوب الممثل في معلم يسمى قطعا زائدا.

تمرين 28 صفحة 108

نعتبر f الدالة المعرفة على المجموعة $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{x}$

1) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2) مثل بيانيا الدالة f على المجموعة $[-3\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 3]$ في معلم متعامد ومتجانس.

الحل :

1) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

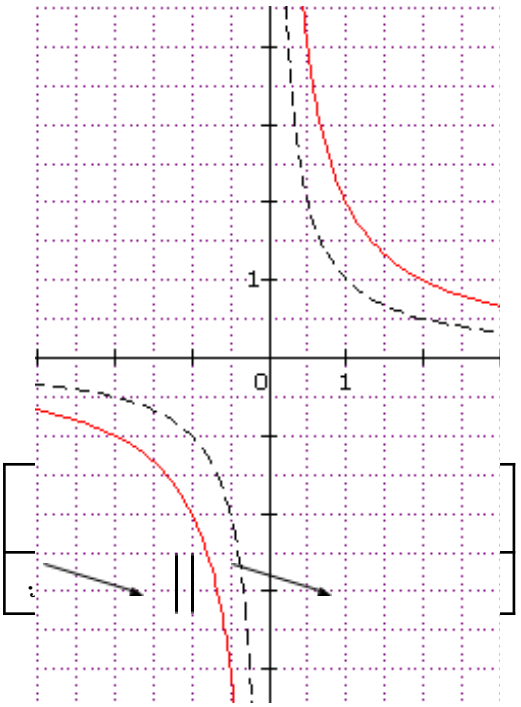
لدينا الدالة مقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]0\ ;\ +\infty[$ و $]-\infty\ ;\ 0[$ إذن :

من أجل كل عددين a و b من المجالين $]0\ ;\ +\infty[$ و $]-\infty\ ;\ 0[$

لدينا $a>b$ معناه $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$ وهذا يعني أن : $\dfrac{2}{b}<\dfrac{2}{a}$

أي : $f(b)<f(a)$

إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0\ ;\ +\infty[$ و $]-\infty\ ;\ 0[$ ومنه جدول التغيرات الدالة f :



2) مثل بيانيا الدالة f على المجموعة $[-3\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 3]$ في معلم متعامد ومتجانس.

تمرين 31 صفحة 108

نعتبر f الدالة المعرفة على المجموعة $]-2\ ;\ +\infty[\cup]-\infty\ ;\ -2[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$

1) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2) مثل بيانيا للدالة f في معلم متعامد .

الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

لدينا الدالة التآلفية $x \mapsto x+2$ متزايدة تماما على المجال $]-2\ ;\ +\infty[$ إذن هي متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty\ ;\ -2[$ و $]-2\ ;\ +\infty[$

ولدينا $x \mapsto x+2$ موجبة على $]-2\ ;\ +\infty[$ وسالبة على $]-\infty\ ;\ -2[$

إذن من أجل كل عددين a و b من المجال $]-\infty\ ;\ -2[$:

$a>b$ معناه $a+2>b+2$ معناه $\dfrac{1}{a+2}>\dfrac{1}{b+2}$ ومعناه $\dfrac{3}{a+2}>\dfrac{3}{b+2}$ أي : $f(a)<f(b)$

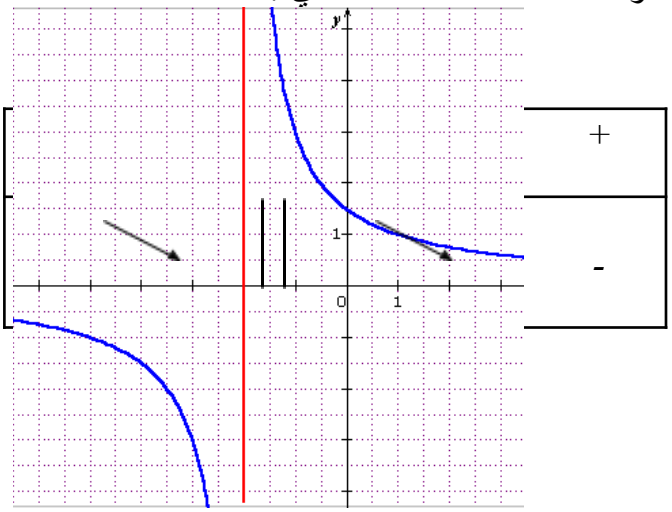
ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty\ ;\ -2[$

وبالمثل من أجل كل عددين a وb من المجال $]-2\,;+\infty[$

$a>b$ معناه $a+2>b+2$ معناه $\frac{1}{a+2}>\frac{1}{b+2}$ ومعناه $\frac{3}{a+2}>\frac{3}{b+2}$ أي : $f(a)<f(b)$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2\,;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :



2) التمثيل بيانيا للدالة f في معلم متعامد .

تمرين 32 صفحة 109

نعتبر f الدالة المعرفة على المجموعة $]-1\,;+\infty[\cup]-\infty\,;-1[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا : $f(x)=2-\frac{1}{x+1}$

2) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الحل :

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا : $f(x)=2-\frac{1}{x+1}$

الطريقة *1* : ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=\frac{2x+2-1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$

الطريقة *2* : ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $2-\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1}=f(x)$

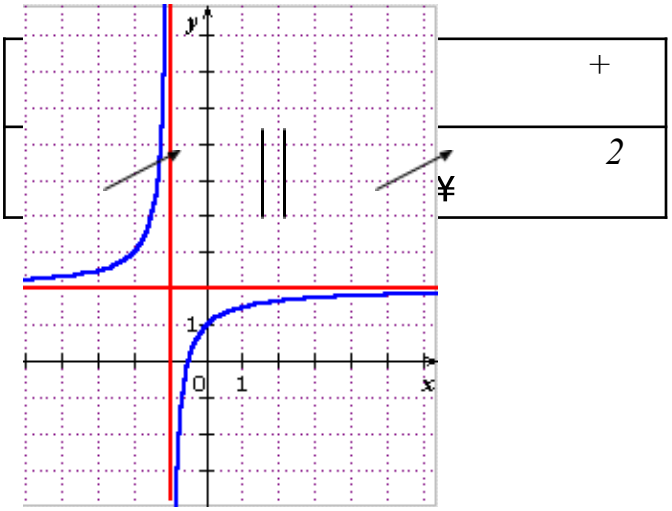
2) دراسة تغيرات الدالة f وتشكل جدول تغيراتها.

ليكن a وb عددين حقيقيين من المجموعة $]-1\,;+\infty[\cup]-\infty\,;-1[$ $a>b$ معناه $a+1>b+1$

معناه $\frac{1}{a+1}>\frac{1}{b+1}$ معناه $-\frac{1}{a+1}<-\frac{1}{b+1}$ معناه $2-\frac{1}{a+1}<2-\frac{1}{b+1}$

معناه $f(a)<f(b)$ إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty\,;-1[$ و $]-1\,;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :



دراسة $f(x)$ عندما يكون x كبير جدا أو صغير جدا :

لدينا $f(10^5)\approx 2$ و $f(-10^5)\approx 2$

دراسة $f(x)$ عندما يكون x قريب جدا من -1 :

$f(-0{,}9999) ; -9998$ و $f(-1{,}0001) ; 10002$

ومنه: عندما يؤول x إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن $f(x)$ يؤول إلى 2

وعندما يؤول x إلى -1 بقيم كبرى فإن $f(x)$ يؤول إلى $(-\infty)$ وبقيم صغرى $f(x)$ يؤول إلى $(+\infty)$

تمرين 33 صفحة 109

(C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+1}$

و (H) هو القطع الزائد الذي يمثل الدالة مقلوب .

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا : $f(x)=3+\dfrac{1}{x+1}$

2) بين أنه يمكن استنتاج (C) انطلاقا من (H) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه.

الحل :

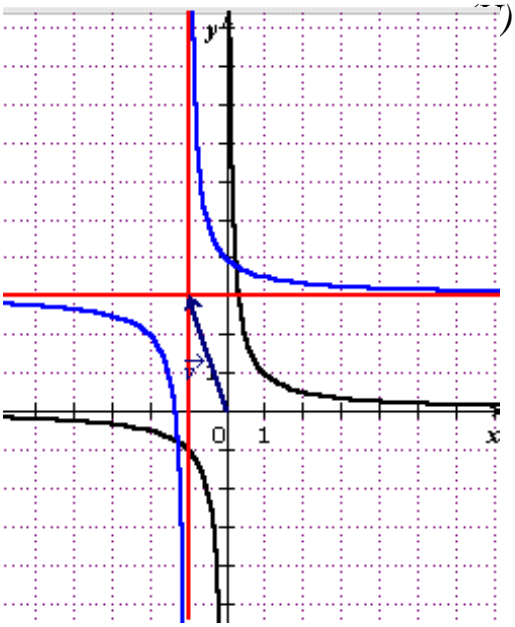
1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا : $f(x)=3+\dfrac{1}{x+1}$

ليكن x عدد حقيقي حيث $x\neq -1$:

الطريقة 1 : $f(x)=\dfrac{3x+3+1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=3+\dfrac{1}{x+1}$

الطريقة 2 : $3+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{3x+4}{x+1}=f(x)$

2) بين أنه يمكن استنتاج (C) انطلاقا من (H) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه.



ليكن x عدد حقيقي غير معدوم ولتكن $M\left(x ; \dfrac{1}{x}\right)$ نقطة من المنحني (C)

ليكن x' عدد حقيقي يختلف عن -1 ولتكن $M'\left(x' ; 3+\dfrac{1}{x'+1}\right)$ نقطة من المنحني (C)

نضع : $x'=x-1$ وتصبح $\dfrac{1}{x'+1}=\dfrac{1}{x}$

ومنه : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ 3+\dfrac{1}{x'+1}-\dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

وبالتالي M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$.