III) القيمة المطلقة والمسافة :

نشاط 8 :

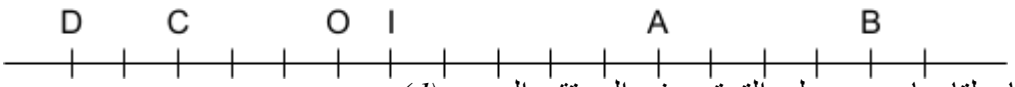
1) أرسم مستقيما عدديا (d) مبدأه O ثم علم النقط D ، C ، B ، A ذات الفواصل 6 ، 10 ، -3 ، -5

2) عين المسافات BC ، CD ، AC ، AB ، OD ، OC ، OB ، OA

3) أنشئ على المستقيم (d) النقطة L حيث $OL = 6$

4) لتكن النقطة M ذات الفاصلة العدد الحقيقي x أحسب OM.

حل النشاط :



تذكير : A و B نقطتان فاصلتاهما x و y على الترتيب في المستقيم العددي (d)

المسافة بين نقطتين A و B هي الفرق بين أكبر فاصلة وأصغر فاصلة

أي : إذا كانت $x \geq y$ فإن : $AB = x - y$ وإذا كانت $x \leq y$ فإن : $AB = y - x$

2) تعيين المسافات :

$OA = 6$ ؛ $OB = 10$ ؛ $OC = 3$ ؛ $OD = 5$ (المسافة هي عدد حقيقي موجب)

$AB = OB - OA = 4$ ؛ $AC = OA + OC = 9$ ؛ $CD = OD - OC = 2$ ؛ $BC = OB + OC = 16$

3) إنشاء النقطة L حيث $OL^2 = 36$

$OL^2 = 36$ معناه $OL = 6$

في هذه الحالة توجد نقطتين L و L' متناظرتين بالنسبة إلى O . إذا كانت فاصلة L هي 6 فإن فاصلة L' هي -6

4) حساب OM حيث x هي فاصلة M

إذا كان $x \geq 0$ فإن : $OM = x$ و إذا كان $x \leq 0$ فإن : $OM = -x$

1 - التعريف :

x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O,I) فاصلتها x .

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ونرمز إليها بالرمز $|x|$. ونكتب $|x| = OM$.

نتائج :

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x| \geq 0$ بصيغة أخرى $|x| \in \mathbb{R}_+$
- $(x \geq 0)$ تكافئ $|x| = x$ $(x \leq 0)$ تكافئ $|x| = -x$

تطبيق 61 صفحة 46

ما هي القيمة المطلقة لكل من الأعداد : 1) -5 ؛ $(-2)^3$ ؛ $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ ؛ $-\frac{1}{10^2}$. 2) x عندما يكون $x^2 = 9$.

الحل :

1 - $|-5| = 0 - (-5) = 5$ ؛ $|(-2)^3| = 0 - (-2)^3 = 2^3$ ؛ $|\sqrt{5} - \sqrt{7}| = 0 - (\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

$$\left|-\frac{1}{10^2}\right| = 0 - \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^2}$$

2 - لدينا : $x = 3$ أو $x = -3$ إذن : $|x| = 3 - 0 = 3$ أو $|x| = 0 - (-3) = 3$ إذن في كلتا الحالتين $|x| = 3$

2 - خواص :

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x| = |-x|$
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sqrt{x^2} = |x|$
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y لدينا : $|xy| = |x| \times |y|$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ وإذا كان y غير معدوم فإن :

3 - المسافة

مبرهنة 1 : إذا كانت a و b فاصلتا النقطتين A و B على الترتيب في المعلم (O,I) فإن : $AB = |a-b|$

ملاحظة : $|a-b| = |b-a|$

تعريف : $|a-b|$ تسمى المسافة بين العددين الحقيقيين a و b ، ونرمز لها بالرمز $d(a\ ;\ b)$.

ملاحظات :

- من أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا $d(x;y) = d(y;x) = |x|$
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $d(x;0) = d(0;x) = |x|$

تطبيق 49 صفحة 45

بفرض P ، N ، M ثلاث نقط ذات الفواصل -4 ، 0 ، -3 على الترتيب من المستقيم العددي .
أحسب المسافات MP ، NP ، MN .

الحل :

لدينا : $MN = d(-4\ ;\ 0) = 4$ ؛ $NP = d(-3\ ;\ 0) = 3$ ؛ $MP = d(-4\ ;\ -3) = 1$

تطبيق 50 صفحة 45

أحسب المسافة بين كل عددين حقيقيين فيما يلي . 5 و 11 ؛ -3 و -2 ؛ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ؛ 3π و 9

الحل :

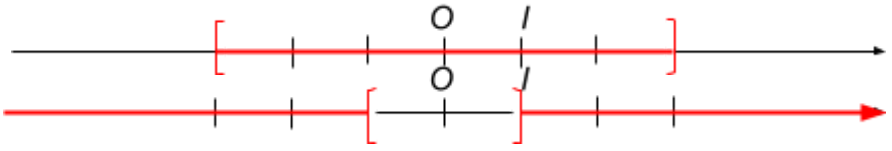
$d(5\ ;\ 11) = 6$ ؛ $d(-3\ ;\ -2) = 1$ ؛ $d(\sqrt{2};\sqrt{3}) = 0.317837245...$ ؛ $d(3\pi;9) = 0.42477796...$

4 - القيمة المطلقة والمجالات :

نشاط 9 : 51 صفحة 45 :

مثل على المستقيم العددي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث : 1) $|x| \leq 3$ 2) $|x| > 1$

حل النشاط :



1) $|x| \leq 3$

2) $|x| > 1$

نشاط 10 : α عدد حقيقي موجب . و x عدد حقيقي.

1. نفرض أنه $|x| \leq \alpha$ أثبت أن $-\alpha \leq x \leq \alpha$
2. نفرض أن $-\alpha \leq x \leq \alpha$ أثبت أن $|x| \leq \alpha$

حل النشاط :

1. نفرض أن $|x| \leq \alpha$
   - إذا كان $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$ ومنه $x \leq \alpha$ إذن : $0 \leq x \leq \alpha$ وبالتالي : $-\alpha \leq x \leq \alpha$
   - إذا كان $x \leq 0$ فإن : $|x| = -x$ ومنه $-x \leq \alpha$ إذن : $0 \leq -x \leq \alpha$ أي : $-\alpha \leq x \leq 0$ وبالتالي : $-\alpha \leq x \leq \alpha$

خلاصة : من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $|x| \leq \alpha$ فإن : $-\alpha \leq x \leq \alpha$

2. نفرض أن $-\alpha \leq x \leq \alpha$

- إذا كان $x \geq 0$ فإن : $0 \leq x \leq \alpha$ ومنه : $0 \leq |x| \leq \alpha$
- إذا كان $x \leq 0$ فإن : $-\alpha \leq x \leq 0$ ومنه : $0 \leq -x \leq \alpha$ أي : $0 \leq |x| \leq \alpha$

خلاصة : من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $-\alpha \leq x \leq \alpha$ فإن : $|x| \leq \alpha$

مبرهنة : α عدد حقيقي موجب . من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x| \leq \alpha$ معناه $-\alpha \leq x \leq \alpha$

ملاحظة : α عدد حقيقي موجب **تماما**. $|x| < \alpha$ معناه $-\alpha < x < \alpha$

نتائج : α عدد حقيقي موجب . من أجل كل عددين حقيقيين x و c لدينا :

1) $|x-c| \leq \alpha$ معناه $-\alpha \leq x-c \leq \alpha$ معناه $c-\alpha \leq x \leq c+\alpha$

2) العبارات الأربعة الآتية متكافئة : $|x-c| \leq \alpha$ ؛ $d(x;c) \leq \alpha$ ؛ $c-\alpha \leq x \leq c+\alpha$ ؛ $x \in [c-\alpha \ ; \ c+\alpha]$

3) العبارة $|x| \leq \alpha$ غير محققة أو غير صحيحة معناه $|x| > \alpha$ محققة (يسمى نفي العبارة)
$|x| \leq \alpha$ غير محققة تكافئ $x \notin [-\alpha \ ; \ \alpha]$ وتكافئ $x \in]-\infty \ ; \ -\alpha[\cup]\alpha \ ; \ +\infty[$
إذن : $|x| > \alpha$ تكافئ $x \in]-\infty \ ; \ -\alpha[\cup]\alpha \ ; \ +\infty[$

تطبيق 57 صفحة 46

بفرض K مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $|3-x| \leq 1$ ، أكتب K على شكل مجال.

الحل : $|3-x| \leq 1$ معناه $|x-3| \leq 1$ يكافئ $x \in [3-1 \ ; \ 3+1]$ أي : $K = [2 \ ; \ 4]$

تطبيق 74 صفحة 47

أعط حصرا للعدد x في الحالات الآتية :

1) $10,1 \leq x-8 \leq 10,2$

2) $|x-3| < 2,5$

3) $d(5;x) \leq 10^{-2}$

الحل :

1) $10,1 \leq x-8 \leq 10,2$ يكافئ $18,1 \leq x \leq 18,2$

2) $|x-3| < 2,5$ يكافئ $3-2,5 < x < 3+2,5$ يكافئ $0,5 < x < 5,5$

3) $d(5;x) \leq 10^{-2}$ يكافئ $|x-5| \leq 10^{-2}$ معناه $5-10^{-2} \leq x \leq 5+10^{-2}$ يكافئ $4,09 \leq x \leq 5,01$

تطبيق 79 صفحة 47

ترجم في شكل $|x-a| \leq \varepsilon$ ما يلي : 1) $x \in [3 \ ; \ 5]$ 2) $x \in [4,1 \ ; \ 4,2]$

الحل :

1) $x \in [3 \ ; \ 5]$ مركز المجال هو $a = 4$ ونصف قطره $\varepsilon = \dfrac{5-3}{2} = 1$ ومنه $|x-4| \leq 1$

2) $x \in [4,1 \ ; \ 4,2]$ مركز المجال هو $a = 4,15$ ونصف قطره $\varepsilon = \dfrac{4,2-4,1}{2} = 0,05 = 5 \times 10^{-2}$
ومنه $|x-4,15| \leq 5 \times 10^{-2}$

تطبيق : 80 صفحة 47 ترجم في شكل حصر ما يلي : 1) $|x-3|\leq 2$ 2) $|x+5,4|\leq 0,1$

الحل :

1) $|x-3|\leq 2$ معناه $1\leq x\leq 5$

2) $|x+5,4|\leq 0,1$ معناه $-5,5\leq x\leq -5,3$

تطبيق 81 صفحة 47 أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$2\leq x\leq 6$	$x\in\ldots$	$d(\ldots\ ;\ \ldots)\leq\ldots$	$\lvert\ldots\rvert\leq\ldots$
	$x\in]-1\ ;\ 5[$		
		$d(x\ ;\ \frac{3}{2})\leq\frac{7}{2}$	
			$\left\lvert x+\frac{5}{2}\right\rvert\leq\frac{3}{2}$

الحل :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$2\leq x\leq 6$	$x\in[2\ ;\ 6]$	$d(x\ ;\ 4)\leq 2$	$\lvert x-4\rvert\leq 2$
$-1<x<5$	$x\in]-1\ ;\ 5[$	$d(x\ ;\ 2)\leq 3$	$\lvert x-2\rvert\leq 3$
$2\leq x\leq 5$	$x\in[2\ ;\ 5]$	$d(x\ ;\ \frac{3}{2})\leq\frac{7}{2}$	$\left\lvert x-\frac{3}{2}\right\rvert\leq\frac{7}{2}$
$-4\leq x\leq -1$	$x\in[-4\ ;\ -1]$	$d(x\ ;\ -\frac{5}{2})\leq\frac{3}{2}$	$\left\lvert x+\frac{5}{2}\right\rvert\leq\frac{3}{2}$

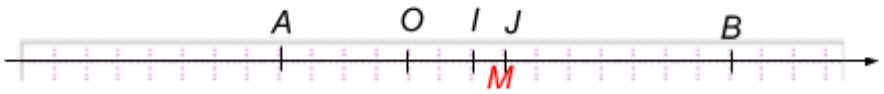
تمرين 55 صفحة 46

على المستقيم المزود بالمعلم $(O\ ;\ I)$ علم النقطتين A و B ذات الفاصلتين -2 و 5 على الترتيب والنقطة J منتصف $[AB]$. M نقطة متحركة فاصلتها x .

عين في كل حالة من الحالات موضع أو مواضع M عندما تحقق فاصلتها الشرط المعين :

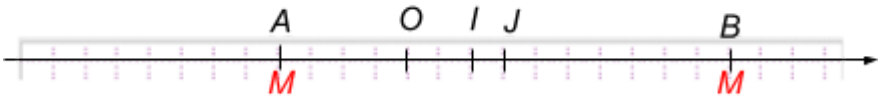
1) $|x+2|=|x-5|$ 2) $|x+2|+|x-5|=7$ 3) $|x+2|<|x-5|$

الحل :



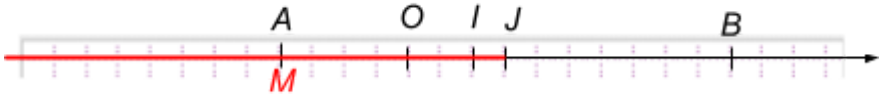
- $|x+2|=|x-5|$

$|x+2|=|x-5|$ معناه $AM=BM$ معناه M هي والنقطة J منتصف $[AB]$.



- $|x+2|+|x-5|=7$

$|x+2|+|x-5|=7$ معناه $AM+BM=7$ معناه Mهي A أو B



$|x+2|<|x-5|$

$|x+2|<|x-5|$ معناه $AM<BM$ معناه M تنتمي إلى نصف المستقيم $[JA)$ باستثناء النقطة J.

5 - القيم المقربة :

تعريف : بفرض عدد حقيقي a و عدد عشري d وعدد طبيعي n .

القول أن d قيمة مقربة عشرية إلى 10^{-n} للعدد a معناه المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n}

بعبارة أخرى $|a-d|<10^{-n}$

وتبعا لكون $d \le a$ أو $d \ge a$ ، نتحدث عن قيمة مقربة بالنقصان أو بالزيادة.

تطبيق 82 صفحة 48 أعط حصرا للعدد المجهول a في الحالات الآتية :

- $2,715$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-3} .
- $3,1416$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-4} .

الحل :

- $2,715$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-3} .

$|a-2,715|<10^{-3}$ معناه $2,715-0,001<a<2,715+0,001$ أي : $2,714<a<2,716$

- $3,1416$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-4} .

$|a-3,1416|<10^{-4}$ معناه $3,1416-0,0001<a<3,1416+0,0001$ أي : $3,1415<a<3,1417$

تطبيق : 73 صفحة 47 عين باستعمال الحاسبة قيما عشرية مقربة بالزيادة و بالنقصان إلى 10^{-4} للأعداد :

$a=\sin 71°$ ؛ $b=\sin^2 71°$ ؛ $c=\cos 71°$ ؛ $d=\cos^2 71°$ ؛ $e=\sin^2 71°+\cos^2 71°$.

قارن العددين 1 و e .

الحل :

$a \simeq 0,945518575$ ؛ $b \simeq 0,894005376$ ؛ $c \simeq 0,325568154$ ؛ $d \simeq 0,105994623$ ؛ $e \simeq 1$

$0,9455<a<0,9456$ ؛ $0,8940<b<0,8941$ ؛ $0,3255<c<0,3256$ ؛

$0,1059<d<0,1060$ ؛ $0,9999<e<1,0001$

بالآلة الحاسبة العلمية نجد $e=1$

ونفس النتائج نجدها بالآلة الحاسبة البيانية