الفصل II

الجزء I 1. بنية الزمرة

نتناول في هذا الجزء البنية الجبرية والتي تشمل الزمرة والحلقة والحقل. نستخدم كل ما تم تناوله في دروس الجبر السابقة الموجهة للسنة الأولى، لذا سيكون التركيز فقط على ما هو جديد. غير أننا سنذكر، من حين إلى آخر، بما هو ضروري.

1.1 الزمرة

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $(*)$ ؛ نقول إن $(G,*)$ **لها بنية زمرة، أو زمرة، إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:**

1. العملية **تجميعية**: $\forall x,y,z \in G:\ x*(y*z)=(x*y)*z$.
2. **يوجد في G عنصر حيادي:**
يوجد e من G بحيث $\forall x \in G:\ x*e=e*x=x$.
3. **لكل عنصر من G نظير:**
مهما كان x من G يوجد a من G بحيث $a*x=x*a=e$.

نقول عن زمرة $(G,*)$ إنها **تبديلية** إذا كان: $\forall x,y \in G:\ x*y=y*x$.

ترميز: إن لم ترد أي إشارة إلى عملية الزمرة نعتبرها ضربية، عمليتها $(\cdot)$ ، ونعبر عن الزمرة بـ G وبدل كتابة $x \cdot y$ نكتب فقط.
في زمرة ضربية نعبر عن نظير x بـ x^{-} أما إذا كانت الزمرة جمعية (عمليتها $+$) نعبر عن نظير x بـ $-x$.

إذا كان n عددا صحيحا والعملية في الزمرة هي $(*)$.
نضع: لما $n>0$: $x^n = x*x*\square*x$ ، x مركب مع نفسه n مرة.
لما $n<0$: $x^n = x^{-1}*x^{-1}*\cdots*x^{-1}$.
ولما $n=0$: $x^n = e$ حيث e هو العنصر الحيادي في G.

ملاحظة1: في زمرة $(G,*)$ لدينا نظير جداء عنصرين هو $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$.
و $(x*y)^2 = x*y*x*y$ لذلك، لما تكون الزمرة ليست تبديلية فإن $(x*y)^2 \neq x^2*y^2$ بصفة عامة.

من بين المجموعات التي من السهل التأكد من كونها زمرا نذكر:

1. $(\mathbb{Z},+)$ مجموعة الأعداد الصحيحة مزودة بعملية الجمع العادي لها بنية زمرة تبديلية. ونقول عنها زمرة جمعية. عنصرها الحيادي 0 *(الصفر)*.
2. من أجل كل مجموعة E بها n عنصر، $n \geq 3$ ، G مجموعة التطبيقات المتقابلة من E نحو E مزودة بعملية تركيب التطبيقات لها بنية زمرة ليست تبديلية.

ننبه القارئ أن الزمر محل دراستنا ليست بالضرورة تبديلية.

2.1 الزمر الجزئية لزمرة

تعريف: لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e. جزء غير خال H من G هو **زمرة جزئية** من G إذا تحقق:

1. شرط الاستقرار: .
2. شرط وجود النظير: .

ونكتب للتعبير على أن H زمرة جزئية من G.

ملاحظة2: تعني أن مقصور عملية G على H يزود H ببنية زمرة.

تعطي النظرية التالية صيغة أخرى للتعريف السابق.

نظرية3: إذا كان H جزءا غير خال من زمرة G فإن الشرطين التاليين متكافئان:

1. $H \leq G$.
2. .

مثال4: في الزمرة الجمعية المجموعة $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ (n عدد طبيعي كيفي).

3.1 الزمر الجزئية لـ $(\mathbb{Z},+)$

قضية5: لكل زمرة جزئية H من $(\mathbb{Z},+)$.

يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث $H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ أي
$n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$

البرهان: كما وردت الإشارة إليه، $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ مهما كان العدد الطبيعي n.
لتكن H زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$. إذا كانت فإن $H = 0\mathbb{Z}$ والقضية صحيحة.
نفرض الآن أن ونضع $E = H \cap \mathbb{N}^*$.
من $H \neq \{0\}$ يوجد h من H، ، إذن أو ومنه . إذن E جزء غير خال من $\mathbb{N}$ وبالتالي يملك أصغر عنصر وحيد (وفق الترتيب العادي) وغير معدوم، فليكن n، .
من تعريف n وكون فإن $n\mathbb{Z} \subseteq H$.
ليكن k، ؛ بقسمة k على n، في $\mathbb{Z}^*$ ، يوجد زوج وحيد q و r من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث .
بما أن $H \leq \mathbb{Z},\ k,\ nq \in H$ فإن .
لو نفرض أن يصبح وهذا يناقض كون n أصغر عنصر في E.
إذن $k = nq \in n\mathbb{Z}$ ومنه $H \subseteq n\mathbb{Z}$. إذن $H = n\mathbb{Z}$.

4.1 الزمرة الجزئية المولدة بمجموعة

تعريف: الزمرة الجزئية من زمرة G **المولدة بمجموعة** غير خالية S من G هي أصغر زمرة جزئية من G تحوي S (أصغر بمفهوم الاحتواء)، ونرمز لها بالرمز .
فهي تقاطع كل الزمر الجزئية من G التي تحوي S.

قضية6: إذا كان S جزءا غير خال من زمرة G لدينا:
$$\langle S \rangle = \{x_1 x_2 \ldots x_n \in G : n \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in S \vee x_i^{-1} \in S\ \ \forall i : 1 \leq i \leq n\}$$
هي مجموعة كل الجداءات المنتهية للعناصر التي تنتمي إلى S أو التي نظائرها تنتمي إلى S.

البرهان: نضع الطرف الأيمن يساوي K ونثبت.
لدينا S غير خالية وكل عنصر منها هو عبارة عن جداء متكون من العنصر نفسه إذن ينتمي إلى K وبالتالي K جزء غير خال من G يحوي S.
ليكن من K أي و حيث من أجل كل i لدينا:
.
إذن ينتمي إلى K حسب تعريفه.

إذن K زمرة جزئية من G تحوي S وبالتالي .
من جهة أخرى كل زمرة جزئية من G تحوي S تحوي حتما كل عناصر K وبالتالي كل زمرة جزئية تحوي S تحوي K. إذن ومنه .

حالة خاصة: إذا كانت S متكونة من عنصر وحيد x، فإن: $\langle S\rangle = \langle x\rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

ملاحظة7: إذا كانت الزمرة G جمعية *(عمليتها هي الجمع)* فإن:
$\langle S\rangle = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \in G : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in S \vee -x_i \in S \ \ \forall i : 1 \le i \le n\}$.
لما فإن $\langle x\rangle = \langle S\rangle = \{nx \in G : n \in \mathbb{Z}\}$.
حيث هو مجموع n ، x مرة لما n موجب؛ ومجموع $-x$ و $-n$ مرة لما n سالب ويساوي 0 لما $n = 0$.

مثال8:

1. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $H = n\mathbb{Z} = \langle n\rangle$ *(حيث* $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ *)* هي زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ مولدة بالعدد n.

2. لدينا $G = \{i^k : k \in \mathbb{Z}\}$ *(حيث* i هو العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$ *)* هي زمرة ضربية مولدة بـ i. أي $G = \{i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i\}$.

3. لتكن G مجموعة التطبيقات، المعرفة من المجموعة $E = \{1,2,3\}$ في نفسها. نمثل عناصرها كما هو مبين أسفله: السطر العلوي يمثل مجموعة البدء للتطبيق والسفلي يمثل مجموعة الصور:

$$e = f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ، \quad ،$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ، \quad ،$$

مثلا f_2 هو التطبيق المعرف بـ: $f_2(1) = 3, \quad f_2(2) = 1, \quad f_2(3) = 2$.

المجموعة G المكونة من الستة عناصر السابقة مزودة بعملية تركيب التطبيقات $(\circ)$ لها بنية زمرة، عنصرها الحيادي هو e. لدينا:

وبالتالي الزمرة الجزئية المولدة عن هي: $\langle f_1 \rangle = \{f_1, f_2, e\}$.
ومن جهة أخرى لدينا: .
أي أن كل عناصر G تُعين عن طريق و فقط وبالتالي الزمرة الجزئية المولدة بـِ و هي G نفسها أي .

ترميز: إذا كان $X \subseteq G, Y \subseteq G$ نضع .

نظرية9: إذا كانت H, K زمرتين جزئيتين من زمرة G فإن:
زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا .

البرهان: واضح أن جزء من G.
نفرض أن . وليكن x، مع .
من كون و فإن ومنه .
من جهة أخرى، ليكن . إذن ، أي يوجد بحيث
. إذن ومنه ونستنتج أن .
عكسيا، نفرض أن . بما أن العنصر الحيادي e ينتمي إلى كل من K و H فإن ومنه .
من أجل بحيث ،
لدينا .
باستعمال الفرض يمكن كتابة بحيث h من H و k من K فنحصل على أن: ومن هذا نستنتج أن HK زمرة جزئية من G.

ملاحظة10:
1. إذا كانت HK زمرة جزئية من زمرة G فإن .
2. إذا كانت H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G فإن:
- بصفة عامة $HK \neq KH$ وبالتالي HK ليست زمرة جزئية من G كما سنرى بمثال فيما يأتي، لكن لدينا دوما $HH = H$ وهذا يُعمم إلى ضرب H في نفسها n مرة.
- إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن HK زمرة جزئية من G من كون $HK = KH$.

مثال*11:* في الزمرة الواردة في المثال*8* من الجزء الأول، بأخذ الزمرتين الجزئيتين:

$$H = \langle f_3 \rangle = \{f_3 \circ f_3 = e, f_3\}$$ وَ

لدينا: و

وبما أن فإن .

5.1 تماثل الزمر

نستعمل عادة التطبيقات للتعرف عما إذا كانت مجموعة ما لها نفس خواص مجموعة أخرى معطاة، الخواص مثل الأصلي، البنية الجبرية ...الخ. في موضوع البنية الجبرية تكون لبعض التطبيقات خواص تتعلق بهذه البنية.

تعريف: لتكن زمرتين. **تماثل** الزمر، من نحو ، هو كل تطبيق يحقق: .
كل تماثل زمر تقابلي نسميه **تشاكل** زمر.

مثال*12*: التطبيق $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ بين الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية $(\mathbb{R},+)$ والزمرة الضربية $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ والمعرف بـ $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=2^x$ ، هو تماثل زمر.

ملاحظة*13*: باستعمال التعريف يمكن إثبات أن تركيب تماثلين هو تماثل، والتطبيق العكسي لأي تشاكل هو تشاكل.

ترميز: إذا وُجد تشاكل بين زمرتين G_1,G_2 نقول إنهما متشاكلتان ونعبر عنه بـ $G_1\approx G_2$.

6.1 خواص التماثلات

نذكر بالخواص التالية:

قضية*14*: لتكن G,G' زمرتين ضربيتين.
من أجل كل تماثل زمر $f:G\to G'$ لدينا الخواص التالية:

1. $f(e)=e'$ (e,e' العنصر الحيادي لـ G,G' على الترتيب).
2. $\forall x\in G:\quad f(x^{-1})=\big(f(x)\big)^{-1}$ ..
3. إذا كانت $H\le G$ فإن $f(H)\le G'$ ، الصورة المباشرة لزمرة جزئية، بتماثل، هي زمرة جزئية كذلك.
4. إذا كانت فإن .

قضية*15*: ليكن f تماثلا بين الزمرتين G,G' . لدينا:

1. f غامر إذا وفقط إذا $\mathrm{Im}f = G'$.
2. f متباين إذا وفقط إذا $\ker f = \{e\}$ (e العنصر الحيادي لـ G).

7.1 المجموع المباشر

لتكن H,K زمرتين جزئيتين من زمرة **تبديلية** والتي نرمز لها بـ .
كما سبقت الإشارة إليه في الملاحظة*10*، الزمرة الجزئية من G المولدة بـ هي ونسميها **مجموع الزمرتين الجزئيتين** H,K .

تعريف: بالنظر إلى الرموز الواردة أعلاه، نسمي الزمرة الجزئية من **مجموعا مباشرا** للزمرتين الجزئيتين H,K إذا كان (0 هو العنصر الحيادي لـ G).
حينئذ نكتب .

قضية*16*: لتكن زمرة تبديلية.
مجموع الزمرتين الجزئيتين H,K هو مباشر إذا وفقط إذا كان كل عنصر من يكتب بشكل وحيد: حيث .

البرهان: نفرض أن المجموع مباشر، أي أن . وليكن x من بحيث مع $h,h' \in H;\ k,k' \in K$.
من المساواة السابقة والفرض لدينا:
وبالتالي . وهذا يعبر عن وحدانية الكتابة.
عكسيا، نفرض أن كل عنصر x من يكتب بطريقة وحيدة على الشكل مع .
وليكن y من . إذن نستطيع كتابة ما يلي:

لدينا إذن . وحدانية كتابة y تؤدي إلى ، ومنه .

8.1 الجداء المباشر

في كل هذه الفقرة نعتبر زمرتين ضربيتين، العنصر الحيادي لكل منهما هو على التوالي.
نضع:
ونعرف القانون الداخلي في بشكل طبيعي عن طريق عمليتي و كما يلي:
$(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in G_1 \times G_2 : (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$.

مزودة بهذا القانون لها بنية زمرة، عنصرها الحيادي ونظير هو
.

تعريف: الزمرة تسمى **زمرة الجداء المباشر** لـ و .
هذا التعريف يعمم إلى الجداء المباشر لعدد منته من الزمر.

نظرية*17*: لتكن زمرتين.
زمرة G تشاكل زمرة الجداء المباشر إذا وفقط إذا وجدت زمرتان جزئيتان و من G بحيث:

1. $1 \le i \le 2,\ H_i \approx G_i$.
2. .
3. .
4. *(e هو العنصر الحيادي لـ G).*

ملاحظة***18: 1***. يمكن أن تكون G_1 و G_2 زمرا جزئية من G.
2. إذا تحققت الشروط الأربعة من النظرية نكتب $G = H_1 \bullet H_2$ حينئذ نقول كذلك إن G جداء مباشر لـ H_1 و H_2 .

مثال***19***: نأخذ الزمرة التبديلية $G = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ ، زمرة صفوف التكافؤ في Z ترديد *6* بالنسبة لجمع صفوف التكافؤ. والزمرتان $G_1 = \langle\bar{2}\rangle$, $G_2 = \langle\bar{3}\rangle$ *(زمرتان جزئيتان من G)* مولدتان بصفي تكافؤ *2* و *3* على الترتيب. بأخذ $1 \le i \le 2$ $H_i = G_i$ وبتطبيق النظرية*17*، نحصل على أن $G \approx G_1 \times G_2$ أي $G = G_1 \oplus G_2$.
أما إذا أخذنا $G = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ و $G_1 = \langle\bar{2}\rangle$, $G_2 = \langle\bar{4}\rangle$ فإن $G \neq G_1 \oplus G_2$.
أي أن G ليست مجموعا مباشرا لـ G_1, G_2 لأن الشرطين *3*. و *4*. غير محققين.

الجزء II الزمرة التناظرية

تعتبر هذه الزمرة مثالا عن الزمر المنتهية فهي تتمتع بخصائص مهمة يُستعان بها لدراسة المحددات، كما سيأتي في الجبر الخطي، وبصفة أشمل في موضوع الأشكال متعددة الخطية. لذا، يُنصح بدراسة الجوانب المتعلقة بها قبل التطرق لموضوع محدد مصفوفة.

1.2 عموميات

تعريف: لتكن E مجموعة غير خالية. نسمي **زمرة تبديلات المجموعة** E مجموعة كل التطبيقات المتقابلة من E نحو E ونرمز لها بالرمز .

ملاحظة*1*: ضمنيا، هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

قضية*2*: لتكن E و مجموعتين غير خاليتين، لدينا:
إذا كان E و لهما نفس القدرة *(لهما نفس الأصلي)* فإن .

البرهان: E و لهما نفس القدرة يعني وجود تقابل .
لتكن . المخطط
يبين أن .
نعتبر التطبيق ، .
متباين لأن يؤدي إلى:

متباين يؤدي إلى f
ومنه وبالتالي . إذن .
غامر لأنه من أجل أي توجد بحيث .
تماثل زمر لأنه من أجل أي فإن:

$$\varphi(\sigma\circ\sigma')=f\circ\sigma\circ\sigma'\circ f^{-1}=\left(f\circ\sigma\circ f^{-1}\right)\circ\left(f\circ\sigma'\circ f^{-1}\right)=\varphi(\sigma)\circ\varphi(\sigma')$$

في كل هذا الجزء نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، ، ونضع $S_n = S_{E_n}$ ونسميها الزمرة التناظرية لـ ونسميها كذلك زمرة تبديلات .

نتيجة3: مهما كانت ذات أصلي مساويا n، .

هذه النتيجة تبين أنه لدراسة الخواص الجبرية لأي زمرة تبديلات لمجموعة منتهية E بها n عنصر ، يكفي دراسة .

كل تبديلة نكتبها على الشكل التالي:

يمثل السطر الأول مجموعة بدء التطبيق والسطر الثاني يمثل مجموعة الصور. العنصر الحيادي في نرمز له بـ e وهو الذي يحقق .

ملاحظة4:

1. هي زمرة ليست تبديلية من أجل ،
2. عدد عناصر الزمرة مساو لـ $n!$ ، إذن هي زمرة منتهية.

2.2 الدورات والمناقلات

تعريف: نقول عن تبديلة إنها **دورة طولها** r $(1\le r\le n, r\in \mathbb{N})$ إذا وُجدت مجموعة مرتبة من r عنصر من ، ، بحيث:

$$\sigma(j_1)=j_2,\sigma(j_2)=j_3,\ldots,\sigma(j_{r-1})=j_r,\sigma(j_r)=j_1$$

$$\forall k\in E_n-\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}:\sigma(k)=k$$

ونكتب هذه الدورة على الشكل التالي:

ملاحظة5: الدورة نعبر عنها أيضا بـ

$$\sigma=(j_k,j_{k+1},\cdots;j_r,j_1,j_2,\cdots,j_{k-1})$$

حالات خاصة:

1. دورة طولها 1 هي التبديلة الحيادية.

2. كل تبديلة طولها 2 نسميها **مناقلة**.

مثال6: في ،
1. التبديلة هي دورة طولها 5 ونكتب .
2. التبديلة هي دورة طولها 2 ونكتب ؛ إذن هي مناقلة
(تنقل 2 إلى 5 و 5 إلى 2 وتترك العناصر الأخرى بدون تغيير).
3. التبديلة $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 5) \circ (2\ 3\ 6)$ ليست دورة.

3.2 خواص الدورات

تعريف: إذا كانت و $\sigma' = (i_1, i_2, \cdots, i_s)$ دورتين من S_n وكان $\{j_1, j_2, \cdots, j_r\} \cap \{i_1, i_2, \cdots, i_s\} = \phi$ فإن $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.
حينئذ نقول إن التبديلتين منفصلتان.

قضية7: إذا كانت $\sigma \in S_n$ دورة طولها r فإن $\sigma^r = e$ و $1 \le k \le r-1 : \sigma^k \ne e$.
(e هو العنصر الحيادي في).

البرهان: لتكن دورة طولها r في .
إذا كان فإن ومنه النتيجة.
نفرض أن ؛ من أجل كل k، ، من تعريف الدورة لدينا:

$$\Omega(\sigma) = \{i : \sigma(i) \ne i\} = \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$$

و $\sigma(j_k) = j_{k+1}, \sigma^2(j_k) = j_{k+2}, \cdots; \sigma^{r-k}(j_k) = j_r, \cdots, \sigma^r(j_k) = j_k$.

إذا كان و $i \in E_n - \Omega(\sigma)$ فإن .
بما أن العناصر مختلفة مثنى مثنى إذن r هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث ومنه النتيجة.

لاحظ، إذا كان فإن $\tau^2 = \tau \circ \tau = e$ وبالتالي .

4.2 تفكيك تبديلة إلى جداء دورات

نظرية*8*: كل تبديلة في تكتب على الشكل حيث s
عدد طبيعي غير معدوم و دورات منفصلة كلها تختلف عن e.
التفكيك وحيد بقطع النظر عن موقع التبديلات ضمن الجداء.

ملاحظة*9*: 1. التفكيك، في النظرية نسميه التفكيك القانوني لـ ، إلى جداء دورات.
2. تبين النظرية أن الزمرة مولدة بمجموعة دوراتها.

مثال*10*: في تفكيك التبديلة

إلى جداء دورات يكون كما يلي: الدورات هي: $\sigma_1=(1,3),\sigma_2=(4,5,6)$
ونكتب على الشكل المختصر .

نتيجة*11*: في S_n ، كل تبديلة تُفكك إلى جداء مناقلات، غير منفصلة بصفة عامة.

البرهان: كل تبديلة تفكك إلى جداء دورات. ولدينا كل دورة تفكك إلى:
$$\gamma=(j_1,j_2)\circ(j_2,j_3)\circ\cdots\circ(j_{r-1},j_r)$$
.

ملاحظة*12*:
1. تبين النتيجة أن الزمرة مولدة بمجموعة مناقلاتها.
2. تفكيك تبديلة إلى جداء مناقلات ليس وحيدا لأنه من أجل ، و مختلفان فيما بينهما ومختلفان عن 1 فإنه يمكن التأكد بسهولة أن المناقلة تكتب على الشكل
وبالتالي فإن مولدة بمجموعة مناقلاتها من الشكل .

مثال*13*: في لتكن التبديلة .

تفكك إلى جداء دورات كما جاء في النظرية*8* كما يلي: $\sigma=(1,4,3)\circ(2,6,8,7)$.
تفكك كل دورة إلى جداء مناقلات كما جاء في النتيجة*11* كما يلي:
$$\sigma=(1,4)\circ(4,3)\circ(2,6)\circ(6,8)\circ(8,7)$$
.

5.2 إشارة تبديلة

تعريف: لتكن ؛ إذا كان $\sigma=\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_t$ مع $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_t$ مناقلات نضع
$\varepsilon(\sigma)=(-1)^t$ ونسميه **إشارة** التبديلة .

في نعتبر التبديلة .

تفكيك إلى جداء مناقلات: $\sigma=(1,3)\circ(4,5,6)=(1,3)\circ(4,5)\circ(5,6)$ وبالتالي في هذه الحالة ومنه $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{t}=-1$.

ملاحظة*14*: في S_n

1. إذا كانت فإن $e=(1,2)\circ(1,2)$ وبالتالي $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{2}=1$.

2. إذا كانت دورة طولها r فإن $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{r-1}$.

بصفة خاصة، إذا كانت مناقلة *(دورة طولها 2)* فإن .

نظرية*15*: لتكن . إذا كانت جداء لـ k مناقلة فإن:

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{k}$ وإذا كان تفكيكين لـ إلى جداء مناقلات فإن k و l زوجيان معا أو فرديان معا.

البرهان: يكفي تطبيق التعريف. فنحصل على: وبالتالي k و l زوجيان معا أو فرديان معا.