6. الدالة التآلفية :

النشاط : نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 3x - 5$

- عين الدالة f بحيث يكون (D) تمثيلها البياني ثم أكتب $f(x)$ بدلالة x .
- من أجل x غير معدوم أحسب النسبة $\dfrac{f(x)+5}{x}$.
- من أجل العددين الحقيقيين x و x' حيث $x \neq x'$ استنتج النسبة $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ماذا تمثل هذه النسبة بالنسبة إلى المستقيم (D) ، و ماذا تمثل بالنسبة إلى الدالة f .

حل النشاط :

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f : x \mapsto 3x - 5$ أي : $f(x) = 3x - 5$.
- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(x)+5}{x} = 3$.
- من أجل العددين الحقيقيين x و x' حيث $x \neq x'$:

$$\frac{f(x)+5}{x} = \frac{f(x')+5}{x'} = \frac{[f(x)+5]-[f(x')+5]}{x-x'} = \frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = 3$$

إذن : $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'} = 3$ هذه النسبة هي ميل المستقيم (D) و هي نسبة تزايد الدالة f .

التعريف : نسمي دالة تآلفية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f : x \mapsto ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان .

ملاحظات :

- التمثيل البياني لدالة تآلفية $f : x \mapsto ax + b$ هو مستقيم معامل توجيهه العدد a .
- إذا كان $b = 0$ فإن الدالة التآلفية تسمى دالة خطية ، وتمثيلها البياني يشمل مبدأ المعلم
- إذا كان $a = 0$ فإن الدالة التآلفية هي الدالة ثابتة ، وتمثيلها البياني يوازي حامل محور الفواصل .

مبرهنة : تكون الدالة f تآلفية إذا وفقط إذا كانت نسبة تزايدها $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ثابتة من من أجل كل عددين حقيقيين x و x' حيث $x \neq x'$

نتيجة 1 : نسبة تزايد دالة تآلفية هي معامل توجيه تمثيلها البياني.

نتيجة 2 : $f : x \mapsto ax + b$ دالة تآلفية

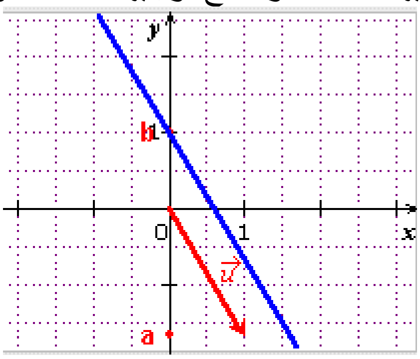
$a < 0$ معناه أن الدالة f متناقصة تماما ، $a > 0$ معناه أن الدالة f متزايدة تماما ، $a = 0$ معناه أن الدالة f ثابتة .

جدول تغيرات الدالة التآلفية $f : x \mapsto ax + b$ وتمثيلها البياني :

التمثيل البياني هو المستقيم معمل توجيهه العدد a وشعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(0 ; b)$

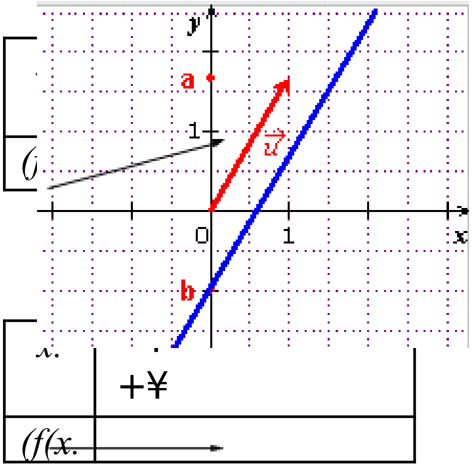
حالة $a < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$

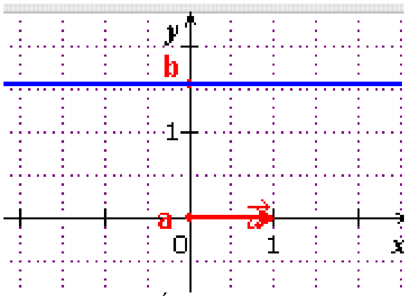


$(f(x.$	

حالة $a > 0$:

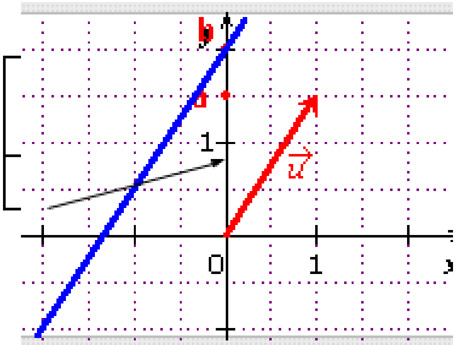


حالة $a = 0$:



مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على ¡ بالشكل : $f : x \mapsto \frac{3}{2}x + 2$ أنشئ جدول تغيراتها ثم مثلها بيانيا.

الحل : $a = \frac{3}{2}$ ولدينا $a > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على ¡



تمثيل البياني للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{3}{2}x + 2$

معامل توجيهه $\frac{3}{2}$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(0 ; 2)$

تمرين 55 صفحة 78 المستوي مزود بمعلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) عين الدالة التآلفية f الممثلة بالمستقيم الذي معامل توجيهه $-2,5$ و المار بالنقطة $M(-1 ; 3)$.

2) عين الدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم الذي يمر بالنقطتين $B(4 ; 4)$ ، $A(1 ;2)$.

3) أعط باستعمال التمثيل البياني قيمة مقربة لحل المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = g(x)$.
تحقق من ذلك بالحساب .

الحل :

1) عين الدالة التآلفية f الممثلة بالمستقيم الذي معامل توجيهه $-2,5$ و المار بالنقطة $M(-1 ; 3)$.
معادلة هذا المستقيم هي $y = - 2,5\ x + b$ حيث : $3 = (-2,5)\ (-1) + b$ أي : $b = 0,5$
ومنه معادلة هذا المستقيم هي $y = - 2,5\ x + 0,5$ إذن : $f : x \mapsto -2,5x + 0,5$

2) عين الدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم الذي يمر بالنقطتين $B(4 ; 4)$ ، $A(1 ;2)$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\4-2\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ومنه معامل توجه هذا المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي معادلة هذا المستقيم هي :

$y=\frac{2}{3}x+b$ حيث : $2=\frac{2}{3}+b$ أي : $b=\frac{4}{3}$ إذن : معادلة هذا المستقيم هي : $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

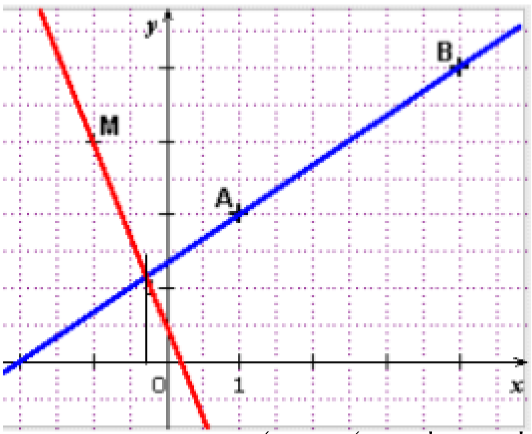
ومنه : $g : x \mapsto \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

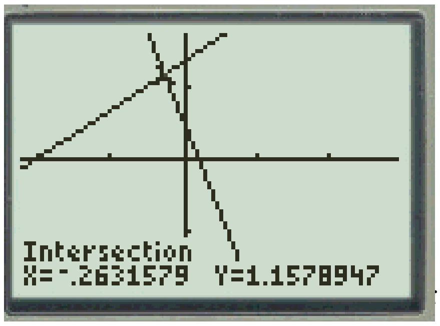
3) أعط باستعمال التمثيل البياني قيمة مقربة لحل المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = g(x)$.

تحقق من ذلك بالحساب .

من التمثيل البياني نلاحظ أن الحل للمعادلة $f(x) = g(x)$ هو $x \approx -0.25$

إذا استعملنا الحاسبة البيانية نجد :





ومعناه $-2,5x+0,$

ومعناه : $\frac{3}{6}-\frac{8}{6}=\frac{4}{6}x+\frac{15}{6}x$ ومعناه : $-\frac{5}{6}=\frac{19}{6}x$ ومعناه : $x=-\frac{5}{19}$.

أي : $x \approx -0,2631578947$

تمرين 57 صفحة 78

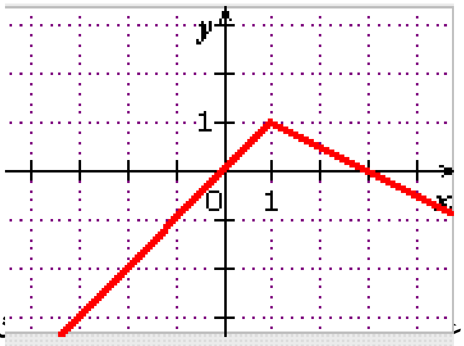
f هي الدالة الممثلة كما في الشكل الآتي :

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة x .

2) أدرس تغيرات f . حل المعادلة $f(x) = -1$.

الحل :

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة x .



نصف المستقيم المرسوم في المجال $]-\infty ; 1]$ له شعا... يشمل المبدأ

إذن معادلته $y = x$.

نصف المستقيم المرسوم في المجال $[1 ; +\infty[$ له شعاع التوجيه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه $-\frac{1}{2}$ ويشمل

النقطة $B(3 ; 0)$ ومنه معادلته $y=-\frac{1}{2}x+b$ حيث : $0=-\frac{1}{2}\times 3+b$ أي : $b=\frac{3}{2}$

إذن : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

وبالتالي الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

إذا كان $x \in]-\infty\ ;1]$ فإن : $f(x)=x$ و إذا كان $x \in [1\ ;+\infty[$ فإن : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

f(1) = 1.

(2 أدرس تغيرات *f* . حل المعادلة *f(x) = - 1* .

في المجال $]-\infty\ ;1]$ لدينا *a = 1* أي : *a > 0* ، إذن الدالة *f* متزايدة تماما على هذا المجال.

و في المجال $[1\ ;+\infty[$ لدينا $a=-\frac{1}{2}$ أي : *a < 0* ، إذن الدالة *f* متناقصة تماما على هذا المجال.

ومنه جدول التغيرات الدالة *f*

x.	$-\infty$ *1* $+\infty$
(f(x.	↗ *1* ↘

- **نحل المعادلة *f(x) = - 1* بيانيا :** من تمثيل البياني العدد *1 –* له سابقتين *x = - 1* و *x′ = 5* و هذا حل بيانيا.
إذن : *f(x) = - 1* تكافئ أن *x = - 1* أو *x = 5* .

- **نحل المعادلة *f(x) = - 1* جبريا :** في المجال $]-\infty\ ;1]$ لدينا *f(x) = - 1* تكافئ *x = - 1*

و في المجال $[1\ ;+\infty[$ لدينا *f(x) = - 1* تكافئ $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-1$ ومعناه أن *x = 5*

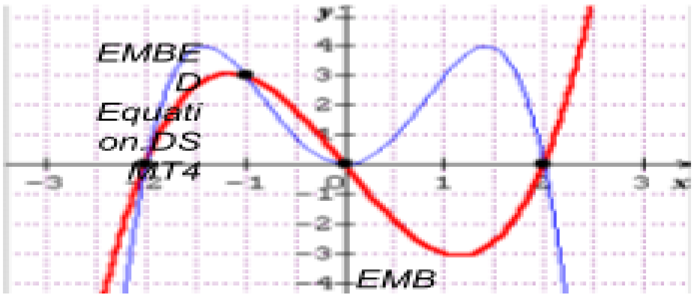
إذن : *f(x) = - 1* تكافئ أن *x = - 1* أو *x = 5* .

7. حل معادلات ومتراجحات بيانيا :

حل بيانيا المعادلة *f(x) = g(x)* بيانيا معناه تعيين فواصل النقط تقطع منحني الدالة *f* ومنحني الدالة *g*.

حل المتراجحة *f(x) > g(x)* معناه تعيين فواصل نقط منحنى الدالة *f* الواقعة فوق منحني الدالة *g* .

مثال :



في الشكل المقابل ، (ζ_f) و (ζ_g) منحنيا الدالتين *f* و *g* على الترتيب.

حل بيانيا كلا من المعادلات الآتية :

f(x) = 0 ؛ *g(x) = 0* ؛ *f(x) = g(x)*

حل بيانيا كلا من المتراجحات الآتية: *f(x) > 4* ؛

f(x) < 0 ؛ $g(x)\geq 0$ ؛ $f(x)\geq g(x)$

حل المثال :

مجموعة حلول المعادلة *f(x) = 0* هي : $s=\{-2\ ;0\ ;2\}$

مجموعة حلول المعادلة *g(x) = 0* هي : $s=\{-2\ ;0\ ;2\}$

مجموعة حلول المعادلة *f(x) = g(x)* هي : $s=\{-2\ ;-1\ ;0\ ;2\}$

مجموعة حلول المتراجحة *f(x) < 0* هي : $s=]-\infty\ ;-2[\cup]2\ ;+\infty[$

مجموعة حلول المتراجحة $g(x)\geq 0$ هي : $s=[-2\ ;0]\cup[2\ ;+\infty[$

مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ هي : $s=[-2\ ;-1]\cup[0\ ;2]$

تمرين 56 صفحة 78

نعتبر الدالتين *f* و *g* المعرفتين على ℝ بالشكل : $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2+5x-3$

نسمي (C_f) و (C_g) المنحنيين الممثلين لهما في معلم متعامد $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) ما هي طبيعة (C_f) ؟

2) عين باستعمال حاسبة بيانية نقط تقاطع المنحنيين .

3) عين باستعمال حاسبة بيانية المجالات حيث : $f < g$ ، $f > g$

4) قارن جبريا f و g بحساب عبارة الدالة $f - g$. استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

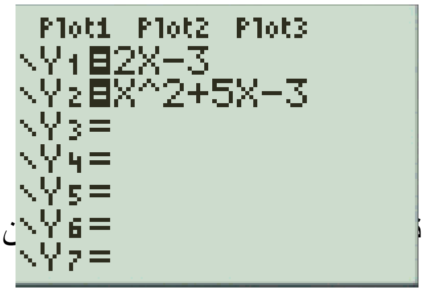
الحل :

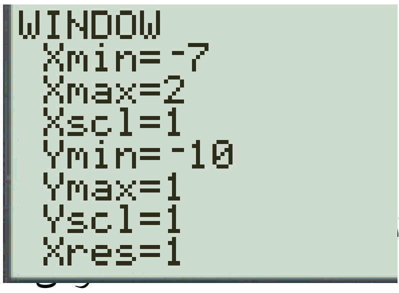
1) طبيعة (C_f) :

الدالة f تآلفية إذن (C_f) هو مستقيم معامل توجيهه 2 ويشمل النقطة ذات الإحداثيتين (0 ; 3 -).

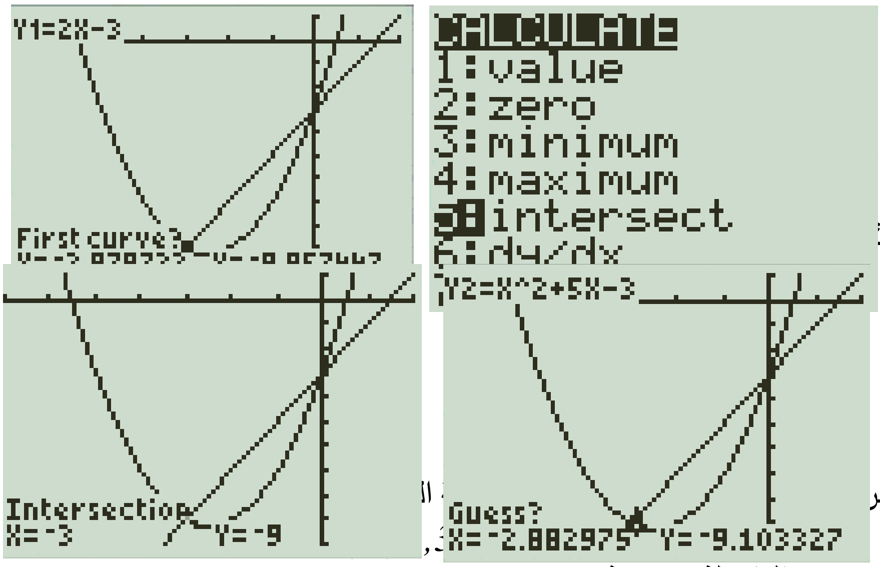
2) عين باستعمال حاسبة بيانية نقط تقاطع المنحنيين .

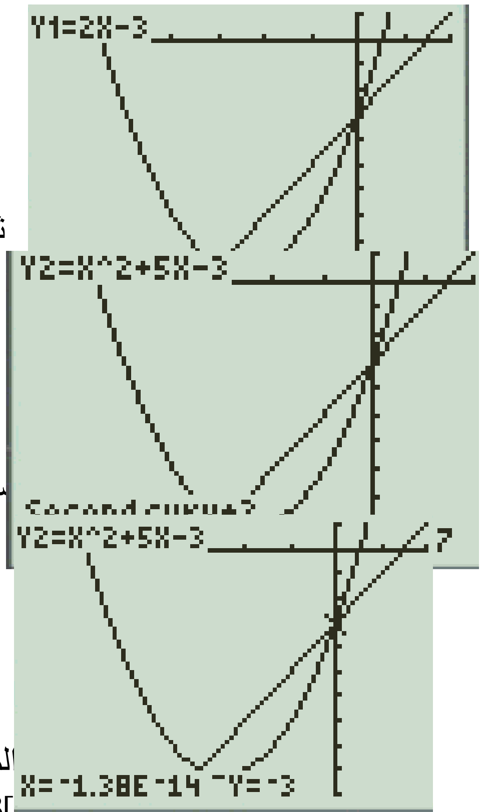
أولا نحجز الدالتين . ثم باللمسة *Window* نعين مجال الرسم بحيث تظهر نقط قاطع المنحنيين





على الشاشة. ثا ... *Intersection 5*





الفاصلة معدومة

... المجالات حيث : $f < g$ ، $f > g$

$x \in]-\infty ; -3[\cup]0 ; +\infty[$ معناه $f < g$

$x \in]-3 ; 0[$ معناه $f > g$

4) قارن جبريا f و g بحساب عبارة الدالة $f - g$. استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

$f(x) - g(x) = -x(x+3)$ $f(x) - g(x) = -x^2 - 3x = -x(x+3)$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)=-x(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
مقارنة $f(x)$ و $g(x)$		$f(x)<g(x)$		$f(x)>g(x)$		$f(x)<g(x)$	
			$f(x)=g(x)$		$f(x)=g(x)$		

في المجالين $]-\infty ; -3[$ و $]0 ; +\infty[$ المنحني (C_f) يقع أسفل المنحني (C_g) .

في المجال $]-3 ; 0[$ المنحني (C_f) يقع فوق المنحني (C_g) .

ويتقاطعان (C_f) و (C_g) في النقطتين التين فاصلتيهما 0 و -3 .