سلاسل الدوال

لتكنX و Y مجموعتين غير خاليتين بحيث $\mathbb{R}\mathbb{R} \subseteq \subseteq$ Xو $\mathbb{K}\mathbb{K} \subseteq$ Y حيث $\subseteq$

($\mathbb{K}\mathbb{K}=\mathbb{C}\mathbb{C}$ أو ($\mathbb{K}\mathbb{K}=\mathbb{R}\mathbb{R}$ ، لتكن $\mathcal{F}\mathcal{F}$ (X,Y) مجموعة الدوال المعرفة من X نحو Y.

إن دراسة سلاسل الدوال يعود إلى دراسة متتاليات الدوال.

1)تعاريف:

تعريف1:

لتكن $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ سلسلة بحيث $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية دوال حقيقية أو مركبة معرفة على المجموعة الغير خالية $X.\left(U_n \in \mathcal{F}(X,Y)\right)$ $X.\left(U_n \in \mathcal{F}(X,Y)\right)$.

لِدراسة السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ندرس متتالية المجموعات الجزئية $\{S_n\}_{n\in N}\ \{S_n\}_{n\in N}$ بحيث $S_n = \Sigma_{p=0}^{n} U_p\ \ S_n = \Sigma_{p=0}^{n} U_p$

المعرفةِ بـ:

$$S_n(x) \ = \Sigma_{k=0}^{\infty} U_k\,(x),\ x \in X = \Sigma_{k=0}^{\infty} U_k\,(x),\ x \in X$$

$$S_n(x)$$

تعريف2 :

✔ السلسلة $R_n = \Sigma_{k=n+1}^{\infty} U_k\ R_n = \Sigma_{k=n+1}^{\infty} U_k$ تسمى باقي السلسلة $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k\ \ \Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$

من الرتبة $n\ n$ أي :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} U_k - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$$

✔ نقول أن السلسلة $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k\ \Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة عند النقطة $x_0\ \ x_0$ بحيث $x_0 \in X$ بحيث $x_0 \in X$

إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ (x_0) (x_0) متقاربة.

✔ نقول أن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة على X X (على مجموعة جزئية A A

مع $X \subset X_A$) نحو S S إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ (x) (x) متقاربة عند كل نقطة x x من X X ($x \in A$ $x \in A$) على التوالي) نحو S S (x) (x) و نقول في هذه الحالة أن التقارب بسيط و نكتب:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

✔ تسمى S بمجموعة السلسلة.

و لدينا التكافؤات:

$\Leftrightarrow$ x_0 $\Leftrightarrow$ x_0 متقاربة عند $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_0)$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_0)$ متقاربة.

$S_n(x_0) \Leftrightarrow$

$S_n(x_0) \Leftrightarrow$ متقاربة.

$\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة على $X \Leftrightarrow \forall x \in X, \Sigma_{k=0}^{\infty} U_k(x)$

متقاربة. $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$

$\Leftrightarrow \{S_n\} \Leftrightarrow \{S_n\}$ متقاربة نحو X

2) ملاحظات:

ملاحظة1 :

تعار يف و نظريات السلاسل العددية تبقى صحيحة بالنسبة

لِسلاسل الدوال.

ملاحظة2 :

في حالة $Y = \mathbb{C}$, تكون السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$

في حالة $Y = \mathbb{C}$, تكون السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة على X إذا و

فقط إذا كان الجزء الحقيقي $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} U_n$ و الجزء التخيلي $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} U_n$ متقاربين على X X و لدينا :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} U_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{Re} U_n + i \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{Im} U_n$$

ملاحظة 3:

إذا كانت السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة على X X فإن باقي السلسلة R_n R_n يؤول نحو 0 لما $n \to +\infty$ $n \to +\infty$ لأن :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S = S_n + R_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} (S - S_n) = S - S = 0$$

ملاحظة 4:

إذا كانت السلسلتين $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ و $\Sigma_{n=0}^{\infty} \vartheta_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \vartheta_n$ متقاربتين

على X X فإن السلسلة $\Sigma_n(\lambda U_n + \alpha V_n)$ $\Sigma_n(\lambda U_n + \alpha V_n)$ حيث $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ سلسلة متقاربة على X X و لدينا المجموع:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda U_n + \alpha V_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} V_n$$

3)التقارب المطلق:

نقول أن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة مطلقا على X

X إذا كانت السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty}|U_n|$ $\Sigma_{n=0}^{\infty}|U_n|$ متقاربة ببساطة على X.

قضية:

إذا كانت $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ و $\Sigma_{n=0}^{\infty} V_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} V_n$ سلسلتين متقاربتين مطلقا على X X فإن جداؤهما $\Sigma_{n=0}^{\infty} W_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} W_n$ سلسلة متقاربة مطلقا على X X بحيث:

$$W_n = \sum_{q+p=n} U_p . V_q$$

و لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_q\right)$$

4)التقارب المنتظم:

تعريف :

نقول أن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ بحيث $U_n: X \to \mathbb{R}$

$U_n: X \to \mathbb{R}$ متقاربة بانتظام إذا كانت $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة بانتظام نحو f f أو إذا كانت السلسلة

متقاربة و الباقي $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تؤول بانتظام نحو0 و نكتب:

$$f = f = \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n \ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$$

ملاحظة:

التقارب المنتظم للسلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ على X X يعني:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\forall x \in X, \quad \left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

5)معيار كوشي:

حتى تكون السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على X يكفي و يلزم ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, \forall p \geq 1, \ \forall x \in X,$$
$$\left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

مثال 1:

السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة على المجال $]-1,1[$ $]-1,1[$ نحو المجموع $S(x) = \frac{1}{1-x}$ $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

لكن التقارب ليس منتظم على $]-1,1[$ $]-1,1[$ لأن :

$\forall n, \lim_{x \to 1^{<}} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \sup_{x \in]-1,1[} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \infty$

$\forall n, \lim_{x \to 1^{<}} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \sup_{x \in]-1,1[} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \infty$

على كل مجال $[-,a]\,[-,a]$ مع $0 < a < 1\; 0 < a < 1$ هناك تقارب منتظم لأن:

$$\forall x \in [-a,a], |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

مع: $\frac{a^{n+1}}{1-a} \to_{n \to +\infty} 0\; \frac{a^{n+1}}{1-a} \to_{n \to +\infty} 0$

مثال 2:

السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}\; \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ متقاربة على $\mathbb{R}\,\mathbb{R}\ \backslash[-1,1]\,\backslash[-1,1]$ نحو $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}\; \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

التقارب منتظم على المجموعة $]-\infty,-b]\cup[b,+\infty[$

$]-\infty,-b]\cup[b,+\infty[$ بحيث: $b>1\ b>1$)يكفي أخذ تغيير المتغير

$y=\frac{1}{x}\ y=\frac{1}{x}$ في المثال1).

6)التقارب النظيمي:

تعريف: نقول أن سلسلة الدوال $\Sigma_{n=0}^{\infty}U_n\ \Sigma_{n=0}^{\infty}U_n$ بحيث $\mathbb{C}\ \mathbb{C}\rightarrow\rightarrow$

$U_n:U_n:\ XX$

متقاربة نظيميا على XX إذا كانت السلسلة العددية ذات الحدود الموجبة

$\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\|U_n\|\ \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\|U_n\|$ متقاربة مع:

$$\|U_n\|=\sup_{x\in X}|U_n(x)|$$

نسمي $\|.\|\ \|.\|$ نظيما.

قضية :

إذا كانت السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة نظيميا على X فإنها متقاربة بانتظام على X.

البرهان: لدينا:

$$\forall n, \forall p \geq 1, \sup_{x\in X}\left|U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots + U_{n+p}(x)\right| \leq \sup_{x\in X}|U_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|U_{n+2}(x)| \ldots + \sup_{x\in X}\left|U_{n+p}(x)\right|$$

$$\forall n, \forall p \geq 1, \sup_{x\in X}\left|U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots + U_{n+p}(x)\right| \leq \sup_{x\in X}|U_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|U_{n+2}(x)| \ldots + \sup_{x\in X}\left|U_{n+p}(x)\right|$$

و حسب معيار كوشي فان السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على $X.X$.

قضية:

نقول أن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة نظيميا إذا وجدت سلسلة ذات

حدود موجبة $\Sigma_{n=0}^{\infty} \propto_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \propto_n$ متقاربة بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |U_n(x)| \leq \propto_n$$

ملاحظة:

التقارب النظيمي أقوى من التقارب المنتظم لأنه يمكن إيجاد سلاسل متقاربة بانتظام و ليست متقاربة نظيميا.

مثال: لنعتبر سلسلة التوابع ذات الحد العام :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{n} & \text{اذا كان} \quad x \in]n\pi, (n+1)\pi[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x \notin]n\pi, (n+1)\pi[\end{cases}$$

لدينا:

$$\|U_n(x)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |U_n(x)| = \frac{1}{n}$$

و بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ ليست متقاربة نظيميا و لكنها متقاربة بانتظام لكون وجود على الأكثر حد غير معدوم, و حسب معيار كوشي فإن السلسلة متقاربة بانتظام .

$$|U_n(x)+U_{n+1}(x)+\cdots+U_{n+p}(x)|\leq\frac{1}{n}$$

نظرية آبال :(Abel)

لنفرض أن $U_n(x)U_n(x)=\propto_n.V_n(x)=\propto_n.V_n(x)$ مع الفرضيات التالية:

1. $(\propto_n)$ $(\propto_n)$ متتالية حقيقية أو مركبة بحيث :

$\propto_n\to_{n\to+\infty}0\ \propto_n\to_{n\to+\infty}0$ و $\sum_{n=0}^{\infty}|\propto_n-\propto_{n+1}|$

$\sum_{n=0}^{\infty}|\propto_n-\propto_{n+1}|$ متقاربة

2. $\exists M>0/\forall n\geq 0,\forall p\geq 0,\forall x\in X;$

$\exists M>0/\forall n\geq 0,\forall p\geq 0,\forall x\in X;$

لدينا:

$$|V_n(x) + V_{n+1}(x) + \cdots + V_{n+p}(x)| \leq M$$

فان السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ متقاربة بانتظام على $\mathrm{X\,X}$.

البرهان:

بوضع: $V_{n,p} = \vartheta_n + \vartheta_{n+1} + \cdots + \vartheta_{n+p}$

نجد : $V_{n,p} = \vartheta_n + \vartheta_{n+1} + \cdots + \vartheta_{n+p}$

$$\mathrm{U_n} + \cdots + U_{n+p} = \alpha_n V_{n,0} - \alpha_{n+1}(V_{n,1} - V_{n,0}) + \cdots$$

$$+\alpha_{n+p}(V_{n,p} - V_{n,p-1})$$

$$= V_{n,0}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) + V_{n,1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \cdots$$

$$+(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})\, V_{n,p-1} + \alpha_{n+p} V_{n,p}$$

$$+(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})\, V_{n,p-1} + \alpha_{n+p} V_{n,p}$$

باستعمال الفرضيات نجد :

$$\|\mathrm{U_n} + \cdots + U_{n+p}\|$$
$$\leq M(|\alpha_n - \alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}| + \cdots$$
$$+ |\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}| + |\alpha_{n+p}|)$$

و حسب معيار كوشي من أجل $p \to +\infty\, p \to +\infty$ السلسلة متقاربة بانتظام.

مثال:

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ متقاربة على $\mathbb{R}\,\mathbb{R}$ و لنعتبر المجال $[a,b]\,[a,b]$ حيث: $2K\pi \notin [a,b] \quad 2K\pi \notin [a,b]$ و $k \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}$

بوضع $\alpha_n = \alpha_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n}$ و $\vartheta_n = \vartheta_n = e^{inx}\, e^{inx}$ نلاحظ أن فرضيات آبال محققة, بالفعل:

$$|e^{inx} + e^{i(n+1)x} + e^{i(n+p)x}| \leq \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|}$$

$$\mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| < +\infty$$

بحيث:

$$\forall n \in \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| < +\infty$$

والفرضية (ب) محققة و منه السلسلة متقاربة بانتظام.

خواص مجموع سلسلة التوابع:

الإستمرارية:

نظرية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام نحو S على X X و كل التوابع U_n U_n مستمرة عند النقطة x_0 **من** X X فان المجموع S للسلسلة

مستمر عند النقطة x_0.

قضية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على المجال

$[a,b]$ $[a,b]$ و كل التوابع U_n U_n مستمرة على $[a,b]$ $[a,b]$ فإن المجموع S مستمر على $[a,b]$ $[a,b]$.

ملاحظة:

إنطلاقا من النظرية يمكن أن نكتب:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x_0)$$

قضية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على

X X و من أجل كل n n بحيث $n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$ ، $U_n\,(x)$ $U_n\,(x)$ تقبل النهاية ℓ_n ℓ_n لما x x يؤول إلى x_0 x_0 $(x_0 \in X)$ $x_0 \in X)$ فان السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة و لدينا على X :

$$\lim_{x\to x_0}\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\,(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ell_n$$

$$\lim_{x\to x_0}\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\,(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\ell_n$$

ملاحظة: إذا كانت الفرضيات غير محققة يمكن أن تكون النتائج غير صحيحة.

مثال:

$$\forall x \in]-1,1[; \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\lim_{x \geq \to -1} x^n = (-1)^n$$

و لدينا:

$$\lim_{x \geq \to -1} x^n = (-1)^n$$

$$\lim_{x \geq \to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \geq \to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$$

رغم أن:

فإن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ غير متقاربة.

و بالتالي غير ممكن أن يكون تقارب السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ منتظم.

مثال:

السلسلة $(1-x\,1-x)$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة على $]-1,1]$ $]-1,1]$

$$= \begin{cases} 1 & \text{اذا كان} \quad x \in]-1,1[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x = 1 \end{cases}$$

بحيث:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x\,1-x) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان} \quad x \in]-1,1[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x = 1 \end{cases}$$

لأن: $S_n(x) = 1 - x^{n+1}\ S_n(x) = 1 - x^{n+1}$

بما أن $S\ S$ دالة غير مستمرة على المجال $]-1,1]]-1,1]$ فان التقارب غير منتظم.

التكامل:

نظرية:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ و التوابع $U_n\ U_n$ $[a,b]$

قابلة للمكاملة على $[a,b]\ [a,b]$ فإن مجموع السلسلة $S\ S$ قابل للمكاملة و لدينا:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}\ (x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx$$

مثال:

إنطلاقا من السلاسل الهندسية يمكن أن نبين أن السلاسل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\mathrm{n}} = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}}\, x^{\mathrm{n}} = \frac{1}{1+x}$$

و $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}}\, x^{2\mathrm{n}} = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

متقاربة بانتظام على كل مجال $]-1,1[$ $]-1,1[\subset\subset [a,b]$ و $[a,b]$

بالتالي باستعمال التكامل حدِ بحد من 0 إلى x x حيث $|x| < 1$ $|x| < 1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -ln(1-x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=ln(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=Arctg\,x$$

نظرية:

لتكن $\Sigma_{n=0}^{\infty}U_n\ (x)=f(x)\,\Sigma_{n=0}^{\infty}U_n\ (x)=f(x)$ سلسلة دوال مستمرة على المجال $[a,+\infty[\,[a,+\infty[$

و متقاربة بانتظام على كل مجال محدود من $[,+\infty[\,[,+\infty[$ لنفرض زيادة على ذلك و من أجل كل $n\in\mathbb{N}\,n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\,n$ ، التكامل $\int_a^{+\infty}U_n\ (x)dx$ متقارب مطلقا و السلسلة ذات الحدود الموجبة $\Sigma_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{\infty}|U_n\ (x)|dx\right)\Sigma_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{\infty}|U_n\ (x)|dx\right)$ متقاربة فان التكامل $\int_a^{+\infty}f(x)dx\,\int_a^{+\infty}f(x)dx$ موجود و يساوي $\Sigma_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{+\infty}U_n\ (x)dx\right)$

ملاحظة:

لدينا المساواة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{a}^{+\infty} \cdot \, \mathrm{d}x\right)=\int_{a}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \cdot\right)dx$$

البرهان: لنضع من أجل $x \geq a \; x \geq a$

$$S_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x)$$

$$\mathcal{F}_n(x) = \int_a^x S_n(t)dt, \qquad \mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

المتتالية $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ متقاربة بانتظام نحو $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ على المجال

$[a,+\infty[$ $[a,+\infty[$ و لدينا:

$$\mathcal{F}_n(x) = \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x U_p(t)dt\right) \mathcal{F}_n(x) = \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x U_p(t)dt\right)$$

$$\mathcal{F}(x) \mathcal{F}(x)$$

$$\mathcal{F}_n(x)| \leq \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x |U_p(t)|dt\right)$$ و منه:

$$|\mathcal{F}(x)\,|\mathcal{F}(x)\,_{-}\mathcal{F}_n(x)| \leq \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x |U_p(t)|dt\right)$$

هو باقي لسلسلة ذات حدود موجبة و متقاربة نحو 0 عندما $n \to +\infty \to +\infty$

n

ومن أجل كل $n\,n$ بحيث $n \in \mathbb{N}\,n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n(x)\,\mathcal{F}_n(x)$ تؤول, لما $x\;x$

يؤول إلى $+\infty\,,+\infty$, نحو:

$$\int_a^{+\infty} S_n(t)dt =$$
$$\int_a^{+\infty} U_0(t)dt + \int_a^{+\infty} U_1(t)dt + \cdots + \int_a^{+\infty} U_n(t)dt$$

$$\int_a^{+\infty} S_n(t)dt =$$
$$\int_a^{+\infty} U_0(t)dt + \int_a^{+\infty} U_1(t)dt + \cdots + \int_a^{+\infty} U_n(t)dt$$

و بما أن فرضيات النظرية محققة فإن:

$$\mathcal{F}_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathcal{F}(x)$$

<u>الإشتقاق:</u>

نظرية:

ليكن XX مجال محدود من $\mathbb{R}\,\mathbb{R}$ و $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ سلسلة دوال بحيث

كل حد قابل للإشتقاق على XX.

إذا وجد على الأقل $x_0\ x_0$ من XX بحيث تكون السلسلة $(x_0)\,(x_0)$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة والسلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n^{'}\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n^{'}\ (x)\,(x)$ و السلسة متقاربة بانتظام على XX فان السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ (x)\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ (x)$ متقاربة بانتظام على XX و المجموع $f\ f$ قابل للإشتقاق على XX مع:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'\ (x)$$

قضية: لنعتبر $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n\ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ بحيث $m \geq 1, U_n \in \mathcal{C}^m\,([a,b])\ m \geq 1, U_n \in \mathcal{C}^m\,([a,b])$ سلسلة دوال تحقق:

1. السلاسل $0 \le k \le m-1, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$

$0 \le k \le m-1, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$ متقاربة على $[a,b]\,[a,b]$

2. السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(m)}\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(m)}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]\,[a,b]$

فان كل السلاسل $0 \le k \le m, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}\ 0 \le k \le m, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$

متقاربة بانتظام على $[a,b]\,[a,b]$ و المجموع $f\ f$ للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ من صنف $C^m\ C^m$ على $[a,b]\,[a,b]$ و لدينا:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}(x), 0 \le k \le m$$

أعمال موجهة

متتاليات وسلاسل الدوال

نصوص التمارين:

تمرين1:

أدرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال في حالة ما إذا كانت متقاربة:

1) $x \to \frac{1}{1+nx}, x \in]0,+\infty[$

2) $x \to \frac{x}{1+nx}, x \in [0,+\infty[$

3) $x \to \frac{x^{\alpha}}{1+nx}, x \in [0,+\infty[\ (\alpha > 0)$

4) $x \to xe^{-nx}, x \in [0,+\infty[$

تمرين2:

لنعتبر متتالية الدوال المعرفة كما يلي:

$$f_n(x)=x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n},x\in]0,a](a>0),f_n(0)=0$$

1. بين أن (f_n) متقاربة ببساطة و ليست متقاربة بانتظام نحو نهاية f مستمرة عند النقطة $x=0$.
2. تحقق من أن المتتالية (f_n) مستمرة كذلك عند النقطة $x=0$.

تمرين3:

بين أن $f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ من صنف C^∞ على IR

تمرين4: أدرس تقارب سلاسل الدوال التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$$

تمرين5:

لنعتبر متتالية الدوال المعرفة على المجال $[0,\infty[$:

$$f_n(x)=(e)^{-(x^n)}$$

1. بين أن (f_n) متقاربة ببساطة نحو نهاية f يطلب تعيينها.
2. بين أن : $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$
3. بين أنه من أجل $a>1$ متتالية الدوال $x^2 e^{-(x^n)}$ متقاربة بانتظام نحو 0 على المجال $[a,\infty[$.
4. استنتج أن $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \to 0$

تمرين6:

ليكن $\alpha>0$, بين أن :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}...$$

(لتثبت أن : $\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n}}{1+x}dx \to 0$ عندما $n\to+\infty$)

تمرين7:

ليكن $\alpha>0$, بين أن :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\log\frac{1}{x}dx=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+2)^2}+\dots$$

(لتثبت أن الدالة $\frac{-x\log x}{1-x}$ المعرفة على المجال $]0,1[$ تقبل امتداد بالاستمرار على المجال $[0,1]$