سلاسل الدوال

لتكنX و Y مجموعتين غير خاليتين بحيث $\subseteq \subseteq \mathbb{R}\,\mathbb{R}$ Xو $\mathbb{K}\,\mathbb{K}$ $\subseteq$

$\subseteq$ Y حيث

($\mathbb{C}\,\mathbb{C}$ =$\mathbb{K}\,\mathbb{K}$ أو) $\mathbb{K}\,\mathbb{K}$= $\mathbb{R}\,\mathbb{R}$ ، لتكن $\mathcal{F}\,\mathcal{F}$ (X,Y) مجموعة الدوال

المعرفة من X نحو .Y

إن دراسة سلاسل الدوال يعود إلى دراسة متتاليات الدوال.

1)تعاريف:

تعريف1:

لتكن $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ سلسلة بحيث $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}\, \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

متتالية دوال حقيقية أو مركبة معرفة على المجموعة الغير خالية

$X\,\left(U_n \in \mathcal{F}\,(X,Y)\right).\, X\,\left(U_n \in \mathcal{F}\,(X,Y)\right).$

لِدراسة السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ندرس متتالية المجموعات

الجزئية $\{S_n\}_{n\in N}$ $\{S_n\}_{n\in N}$ بحيث $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$ $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$

المعرفةِ ب:

$$S_n(x) \quad = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x),\ x \in X = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x),\ x \in X$$

$$S_n(x)$$

تعريف2 :

✔ السلسلة $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k$ $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k$ تسمى باقي

السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$

من الرتبة n n أي :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} U_k - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$$

✔ نقول أن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة عند النقطة x_0 x_0

بحيث $x_0 \in X$ بحيث $x_0 \in X$

إذا كانت السلسلة العددية (x_0) (x_0) $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة.

✔ نقول أن السلسلة $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة على X X (على

مجموعة جزئية A A

مع A $X \subset X \subset$) نحو S S إذا كانت السلسلة (x) (x) $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$

$\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة عند كل نقطة x x من X X ($A \ni x$ $A \ni x$ على

التوالي) نحو (x) (x) S S و نقول في هذه الحالة أن التقارب بسيط و

نكتب:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

✔ تسمى S بمجموعة السلسلة.

و لدينا التكافؤات:

$\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k$ متقاربة عند x_0 $\Leftrightarrow$ x_0 $\Leftrightarrow$

$\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k(x_0)$ $\Sigma_{k=0}^{\infty} U_k(x_0)$ متقاربة.

$\Leftrightarrow S_n(x_0)$

$\Leftrightarrow S_n(x_0)$ متقاربة.

$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x), \forall x \in X \Leftrightarrow X$ متقاربة على $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x), \forall x \in X \Leftrightarrow X$ متقاربة.

$X\,X$ متقاربة نحو $\{S_n\} \Leftrightarrow \{S_n\} \Leftrightarrow$

2) ملاحظات:

ملاحظة1 :

تعار يف و نظريات السلاسل العددية تبقى صحيحة بالنسبة

لِسلاسل الدوال.

ملاحظة2 :

في حالة $Y = \mathbb{C}$, تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$

في حالة $Y = \mathbb{C}$, تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة على $X\,X$ إذا و

فقط إذا كان الجزء الحقيقي $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, U_n \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, U_n$ و الجزء التخيلي $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, U_n \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, U_n$ متقاربين على $X\ X$ و لدينا :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} U_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{Re}\, U_n + i \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{Im}\, U_n$$

ملاحظة 3:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة على $X\ X$ فإن باقي السلسلة $R_n\ R_n$ يؤول نحو 0 لما $n \to +\infty\ n \to +\infty$ لأن :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S = S_n + R_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} (S - S_n) = S - S = 0$$

ملاحظة 4:

إذا كانت السلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} U_n \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n$ متقاربتين

على X X فإن السلسلة $\Sigma_n(\lambda U_n + \alpha V_n)$ $\Sigma_n(\lambda U_n + \alpha V_n)$ حيث

$\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ سلسلة متقاربة على X X و لدينا المجموع:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda U_n + \alpha V_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} V_n$$

3)التقارب المطلق:

نقول أن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة مطلقا على X

X إذا كانت السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty}|U_n|$ $\Sigma_{n=0}^{\infty}|U_n|$ متقاربة ببساطة على $X.X.$

قضية:

إذا كانت $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ و $\Sigma_{n=0}^{\infty} V_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} V_n$ سلسلتين

متقاربتين مطلقا على X X فإن جداؤهما $\Sigma_{n=0}^{\infty} W_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} W_n$ سلسلة

متقاربة مطلقا على X X بحيث:

$$W_n = \sum_{q+p=n} U_p . V_q$$

و لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_q\right)$$

4)التقارب المنتظم:

تعريف :

نقول أن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ بحيث $U_n: X \to \mathbb{R}$

$U_n: X \to \mathbb{R}$ متقاربة بانتظام إذا كانت $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة

بانتظام نحو f f أو إذا كانت السلسلة

متقاربة و الباقي $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تؤول بانتظام نحو 0 و نكتب:

$$f = f = \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n \ \Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$$

ملاحظة:

التقارب المنتظم للسلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} U_n$ على X X يعني:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\forall x \in X, \quad \left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

5)معيار كوشي:

حتى تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على X

X يكفي و يلزم ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, \forall p \geq 1, \quad \forall x \in X,$$

$$\left[n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

مثال 1:

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة على المجال $]-1,1[$ $]-1,1[$

نحو المجموع $S(x) = \frac{1}{1-x}$ $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

لكن التقارب ليس منتظم على $]-1,1[$ $]-1,1[$ لأن :

$$\forall n, \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \sup_{x\in]-1,1[}\left(S_n(x) - S(x)\right) = \infty$$

$$\forall n, \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \left(S_n(x) - S(x)\right) = \sup_{x\in]-1,1[}\left(S_n(x) - S(x)\right) = \infty$$

على كل مجال $[-,a]$ $[-,a]$ مع $0 < a < 1$ $0 < a < 1$ هناك تقارب منتظم لأن:

$$\forall x \in [-a,a], |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

مع: $\frac{a^{n+1}}{1-a} \to_{n\to+\infty} 0$ $\frac{a^{n+1}}{1-a} \to_{n\to+\infty} 0$

<u>مثال 2:</u>

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ متقاربة على $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ نحو $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$ $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

التقارب منتظم على المجموعة $]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[$

$]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[$ بحيث: $b > 1$ $b > 1$)يكفي أخذ تغيير المتغير

$y = \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{x}$ في المثال1).

6)التقارب النظيمي:

تعريف : نقول أن سلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ بحيث $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

$U_n : U_n :$ X X

متقاربة نظيميا على X X إذا كانت السلسلة العددية ذات الحدود الموجبة

$\sum_{n=0}^{n=\infty}\|U_n\|$ $\sum_{n=0}^{n=\infty}\|U_n\|$ متقاربة مع:

$$\|U_n\| = \sup_{x\in X}|U_n(x)|$$

نسمي $\|\cdot\|$ $\|\cdot\|$ نظيما.

قضية :

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة نظيميا على X فإنها متقاربة بانتظام على X.

البرهان: لدينا:

$$\forall n, \forall p \geq 1, \sup_{x\in X}\left|U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots + U_{n+p}(x)\right| \leq \sup_{x\in X}|U_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|U_{n+2}(x)| \ldots + \sup_{x\in X}\left|U_{n+p}(x)\right|$$

$$\forall n, \forall p \geq 1, \sup_{x\in X}\left|U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots + U_{n+p}(x)\right| \leq \sup_{x\in X}|U_{n+1}(x)| + \sup_{x\in X}|U_{n+2}(x)| \ldots + \sup_{x\in X}\left|U_{n+p}(x)\right|$$

و حسب معيار كوشي فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على $X.X.$

قضية:

نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة نظيميا إذا وجدت سلسلة ذات

حدود موجبة $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n$ متقاربة بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |U_n(x)| \leq \propto_n$$

ملاحظة:

التقارب النظيمي أقوى من التقارب المنتظم لأنه يمكن إيجاد سلاسل متقاربة بانتظام و ليست متقاربة نظيميا.

مثال: لنعتبر سلسلة التوابع ذات الحد العام :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{sin^2 x}{n} & \text{اذا كان} \quad x \in]n\pi, (n+1)\pi[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x \notin]n\pi, (n+1)\pi[\end{cases}$$

لدينا:

$$\|U_n(x)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)| = \frac{1}{n}$$

و بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_n}$ ليست متقاربة نظيميا و لكنها متقاربة بانتظام لكون وجود على الأكثر حد غير معدوم, و حسب معيار كوشي فإن السلسلة متقاربة بانتظام .

$$|\mathrm{U_n}\,(x)+\mathrm{U_{n+1}}\,(x)+\cdots+\mathrm{U_{n+p}}\,(x)|\leq\frac{1}{n}$$

نظرية آبال :(Abel)

لنفرض أن $\mathrm{U_n}\,(x)\,\mathrm{U_n}\,(x)\;=\propto_n.V_n(x)=\propto_n.V_n(x)$ مع الفرضيات التالية:

1. $(\propto_n)$ $(\propto_n)$ متتالية حقيقية أو مركبة بحيث :
   $\propto_n\to_{n\to+\infty}0\propto_n\to_{n\to+\infty}0$ و $\sum_{n=0}^{\infty}|\propto_n-\propto_{n+1}|$ $\sum_{n=0}^{\infty}|\propto_n-\propto_{n+1}|$ متقاربة
2. $\exists M>0/\forall n\geq 0,\forall p\geq 0,\forall x\in X;$
   $\exists M>0/\forall n\geq 0,\forall p\geq 0,\forall x\in X;$

لدينا:

$$|V_n(x)+V_{n+1}(x)+\cdots+V_{n+p}(x)|\leq M$$

فان السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{n}}$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{n}}$ متقاربة بانتظام على X X.

البرهان:

بوضع: $V_{n,p}=\vartheta_n+\vartheta_{n+1}+\cdots+\vartheta_{n+p}$

$V_{n,p}=\vartheta_n+\vartheta_{n+1}+\cdots+\vartheta_{n+p}$ نجد :

$$\mathrm{U}_{\mathrm{n}}+\cdots+U_{n+p} \;=\alpha_n\,V_{n,0}-\alpha_{n+1}(V_{n,1}-V_{n,0})+\cdots$$

$$+\alpha_{n+p}(V_{n,p}-\;V_{n,p-1})$$

$$=\;V_{n,0}(\alpha_n-\alpha_{n+1})+V_{n,1}(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\cdots$$

$$+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})\,V_{n,p-1}+\alpha_{n+p}V_{n,p}$$

$$+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})\,V_{n,p-1}+\alpha_{n+p}V_{n,p}$$

باستعمال الفرضيات نجد :

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{U}_{\mathrm{n}}+\cdots+U_{n+p}\|\\&\qquad\leq M(|\alpha_n-\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|+\cdots\\&\qquad+|\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+|\alpha_{n+p}|)\end{aligned}$$

و حسب معيار كوشي من أجل $p \to +\infty p \to +\infty$ السلسلة متقاربة بانتظام.

مثال:

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ متقاربة على $\mathbb{R}\ \mathbb{R}$ و لنعتبر المجال $[a,b]\ [a,b]$ حيث: $2K\pi \notin [a,b] \quad 2K\pi \notin [a,b]$ و $k \in \mathbb{Z}$ $k \in \mathbb{Z}$

بوضع $\alpha_n = \alpha_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n}$ و $\vartheta_n = \vartheta_n = e^{inx}\ e^{inx}$ نلاحظ أن فرضيات آبال محققة, بالفعل:

$$|e^{inx} + e^{i(n+1)x} + e^{i(n+p)x}| \leq \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|}$$

بحيث:

$$\mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| < +\infty$$

$$\forall n \in \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| < +\infty$$

والفرضية (ب) محققة و منه السلسلة متقاربة بانتظام.

خواص مجموع سلسلة التوابع:

الإستمرارية:

نظرية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام نحو S

على X X و كل التوابع U_n U_n مستمرة عند النقطة x_0 **من** X X فان

المجموع S للسلسلة

مستمر عند النقطة x_0.

قضية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على

المجال

$[a,b]$ $[a,b]$ و كل التوابع U_n U_n مستمرة على $[a,b]$ $[a,b]$ فإن المجموع

S مستمر على $[a,b]$ $[a,b]$.

ملاحظة:

إنطلاقا من النظرية يمكن أن نكتب:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x_0)$$

قضية:

إذا كانت سلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على

X X و من أجل كل n n بحيث $n\in\mathbb{N}$ $n\in\mathbb{N}$ ، $U_n\ (x)$ $U_n\ (x)$ تقبل

النهاية ℓ_n ℓ_n لما x x يؤول إلى x_0 x_0 $(x_0\in X)$ $x_0\in X)$ فان السلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة و لدينا على X :

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\ell_n$$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} U_n\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty}\ell_n$$

ملاحظة: إذا كانت الفرضيات غير محققة يمكن أن تكون النتائج غير صحيحة.

مثال:

$$\forall x \in]-1,1[; \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x^n = (-1)^n$$

و لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x^n = (-1)^n$$

رغم أن:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$$

فإن السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ غير متقاربة.

و بالتالي غير ممكن أن يكون تقارب السلسلة $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ منتظم.

مثال:

السلسلة $(1 - x\ 1 - x)$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة على $]-1,1]$ $]-1,1]$

بحيث:

$$=\begin{cases}1 & \text{اذا كان} \quad x\in]-1,1[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x=1\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(1-x\,1-x\right)=\begin{cases}1 & \text{اذا كان} \quad x\in]-1,1[\\ 0 & \text{اذا كان} \quad x=1\end{cases}$$

لأن: $S_n(x)=1-x^{n+1}\ S_n(x)=1-x^{n+1}$

بما أن $S\ S$ دالة غير مستمرة على المجال $]-1,1]]-1,1]$ فان التقارب غير منتظم.

التكامل:

نظرية:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ $[a,b]$ و التوابع $\mathrm{U_n}\ \mathrm{U_n}$

قابلة للمكاملة على $[a,b]\ [a,b]$ فإن مجموع السلسلة $S\ S$ قابل للمكاملة و لدينا:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \ (x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b U_n(x)dx$$

مثال:

إنطلاقا من السلاسل الهندسية يمكن أن نبين أن السلاسل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ x^n = \frac{1}{1+x}$$

و $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

متقاربة بانتظام على كل مجال $[a,b]\,[a,b] \subset\subset \,]-1,1[\,]-1,1[$ و

بالتالي باستعمال التكامل حدبِحد من 0 إلى $x \ x$ حيث $|x|<1 \ |x|<1$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -ln(1-x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = ln(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = Arctg\, x$$

نظرية:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = f(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = f(x)$ سلسلة دوال مستمرة

على المجال $[a,+\infty[$ $[a,+\infty[$

و متقاربة بانتظام على كل مجال محدود من $[,+\infty[$ $[,+\infty[$ لنفرض زيادة على

ذلك و من أجل كل n n بحيث $n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$ ، التكامل $\int_a^{+\infty} U_n(x)dx$

$\int_a^{+\infty} U_n(x)dx$ متقارب مطلقا و السلسلة ذات الحدود الموجبة

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{\infty}|U_n(x)|dx\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{\infty}|U_n(x)|dx\right)$ متقاربة فان التكامل

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ موجود و يساوي $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{+\infty} U_n(x)dx\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{+\infty} U_n(x)dx\right)$

ملاحظة:

لدينا المساواة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{a}^{+\infty} \cdot \,\mathrm{d}x\right)=\int_{a}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \right)dx$$

البرهان: لنضع من أجل $x \geq a$ $x \geq a$

$$S_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x)$$

$$\mathcal{F}_n(x) = \int_a^x S_n(t)dt, \qquad \mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

المتتالية $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$ متقاربة بانتظام نحو $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ على المجال $[a,+\infty[$ $[a,+\infty[$ و لدينا:

$$\_\mathcal{F}_n(x) = \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x U_p(t)dt\right)\mathcal{F}_n(x) = \Sigma_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x U_p(t)dt\right)$$

$$\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x)$$

و منه: $\mathcal{F}_n(x)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x |U_p(t)|dt\right)$

$|\mathcal{F}(x)\ |\mathcal{F}(x)\ \_\mathcal{F}_n(x)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty}\left(\int_a^x |U_p(t)|dt\right)$

هو باقي لسلسلة ذات حدود موجبة و متقاربة نحو 0 عندما $n \to +\infty \to +\infty$ n

ومن أجل كل $n\ n$ بحيث $n \in \mathbb{N}\ n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n(x)\ \mathcal{F}_n(x)$ تؤول, لما $x\ x$ يؤول إلى $+\infty\ , +\infty$ ، نحو:

$$\int_a^{+\infty} S_n(t)dt = \int_a^{+\infty} U_0(t)dt + \int_a^{+\infty} U_1(t)dt + \cdots + \int_a^{+\infty} U_n(t)dt$$

$$\int_a^{+\infty} S_n(t)dt = \int_a^{+\infty} U_0(t)dt + \int_a^{+\infty} U_1(t)dt + \cdots + \int_a^{+\infty} U_n(t)dt$$

و بما أن فرضيات النظرية محققة فإن:

$$\mathcal{F}_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathcal{F}(x)$$

الإشتقاق:

نظرية:

ليكن X X مجال محدود من $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ سلسلة دوال بحيث

كل حد قابل للإشتقاق على X X.

إذا وجد على الأقل x_0 x_0 من X X بحيث تكون السلسلة (x_0) (x_0) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ متقاربة و السلسلة (x) (x) $\sum_{n=0}^{\infty} U_n'$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n'$ و السلسة متقاربة بانتظام على X X فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}\ (\mathrm{x})$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}\ (\mathrm{x})$ متقاربة بانتظام على X X و المجموع f f قابل للإشتقاق على X X مع:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}\ (\mathrm{x})\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'\ (\mathrm{x})$$

قضية:

لنعتبر $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U_n}$ بحيث $m \geq 1, U_n \in \mathcal{C}^m\ ([a,b])$ $m \geq 1, U_n \in \mathcal{C}^m\ ([a,b])$ سلسلة دوال تحقق:

1. السلاسل $0 \leq k \leq m-1, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$

$[a,b]$ $[a,b]$ متقاربة على $0 \leq k \leq m-1, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$

2. السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(m)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(m)}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ $[a,b]$

فان كل السلاسل $0 \leq k \leq m, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$ $0 \leq k \leq m, \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$

متقاربة بانتظام على $[a,b]$ $[a,b]$ و المجموع f f للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ من صنف C^m C^m على $[a,b]$ $[a,b]$ و لدينا:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}(x), 0 \leq k \leq m$$

أعمال موجهة

متتاليات وسلاسل الدوال

نصوص التمارين:

تمرين1:

أدرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال في حالة ما إذا كانت متقاربة:

1) $x \to \frac{1}{1+nx}, x \in]0,+\infty[$

2) $x \to \frac{x}{1+nx}, x \in [0,+\infty[$

3) $x \to \frac{x^{\alpha}}{1+nx}, x \in [0,+\infty[\ (\alpha > 0)$

4) $x \to x e^{-nx}, x \in [0,+\infty[$

تمرين2:

لنعتبر متتالية الدوال المعرفة كما يلي:

$$f_n(x)=x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n},x\in]0,a](a>0),f_n(0)=0$$

1. بين أن (f_n) متقاربة ببساطة و ليست متقاربة بانتظام نحو نهاية f مستمرة عند النقطة $x=0$.
2. تحقق من أن المتتالية (f_n) مستمرة كذلك عند النقطة $x=0$.

تمرين3:

بين أن $f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ من صنف C^∞ على IR

تمرين4: أدرس تقارب سلاسل الدوال التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} \quad و \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}$$

تمرين5:

لنعتبر متتالية الدوال المعرفة على المجال $]0,\infty[$:

$$f_n(x)=(e)^{-\left(x^n\right)}$$

1. بين أن $\left(f_n\right)$ متقاربة ببساطة نحو نهاية f يطلب تعيينها.
2. بين أن : $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$
3. بين أنه من أجل $a>1$ متتالية الدوال $x^2 e^{-\left(x^n\right)}$ متقاربة بانتظام نحو 0 على المجال $[a,\infty[$.
4. استنتج أن $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \to 0$

تمرين6:

ليكن $\alpha>0$, بين أن :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}...$$

(لتثبت أن : $\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n}}{1+x}dx \to 0$ عندما $n\to+\infty$)

تمرين7:

ليكن $\alpha>0$, بين أن :

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\log\frac{1}{x}dx=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+2)^2}+\dots$$

(لتثبت أن الدالة $\frac{-x\log x}{1-x}$ المعرفة على المجال $]0,1[$ تقبل امتداد بالاستمرار على المجال $[0,1]$