III) معادلة مستقيم

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$. لنعلم النقطتين $B(3\ ;\ -4)$ ، $A(-2\ ;\ 3)$.

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع u بالنسبة للمستقيم (AB) .

2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و v مرتبطين خطيا.
باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

4) $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x\ ;\ y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطين خطيا.

حل النشاط :

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع u بالنسبة للمستقيم (AB) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$ إذن : u و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

u هو شعاع التوجيه المستقيم (AB) .

2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه : $-7(x+2)=5(y-3)$
ويكافئ أن : $7x+5y-1=0$. تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) .

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و v مرتبطين خطيا.
مجموعة النقط N هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي منحى الشعاع v .
باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

لدينا : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AN}$ و v مرتبطان خطيا معناه أن : $3(x+2)=2(y-3)$
ويكافئ أن : $3x+12=2y-6$ أي : $3x-2y+12=0$ ومعناه أن : $y=\frac{3}{2}x+4$

4) $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x\ ;\ y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\vec{BL}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+4 \end{pmatrix}$ و $\vec{W}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ، $\vec{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $\beta(x-3)=\alpha(y+4)$
ويكافئ $\beta x-\alpha y-4\alpha-3\beta=0$

1. التعريف :

v شعاع غير معدوم من المستوي ، مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\vec{AM}$ و v مرتبطين خطيا ، هي مستقيم (Δ) يوازي منحى v .
كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (Δ) يسمى شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) .

ملاحظات :

- إذا كان v شعاع التوجيه المستقيم (Δ) فإن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم k ، $k.v$ هو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) . (لمستقيم عدد غير منته من أشعة التوجيه)
- يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

مثال : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ، مجموعة النفط M بحيث يكون $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ مرتبطين خطيا هي المستقيم (AB) شعاع توجيهه كل شعاع $k.\vec{AB}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$

2. معادلة مستقيم :

مبرهنة : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.

- كل مستقيم له معادلة من الشكل $a\,x+b\,y+c=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة و x ، y متغيرين حقيقيين ؛ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة حيث : $a \neq 0$ أو $b \neq 0$.
مجموعة النقط $M(x\ ;\ y)$ التي إحداثياتها $(x\ ;\ y)$ تحقق المعادلة : $a\,x+b\,y+c=0$ هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

تعريف : العلاقة $a\,x+b\,y+c=0$ حيث : $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم.

إذا كان $b \neq 0$ فالمعادلة تصبح من الشكل $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ وتسمى المعادلة المبسطة ، العدد $-\frac{a}{b}$ يسمى معامل التوجيه للمستقيم.

ملاحظات :

01. إذا كان $b=0$ فإن $a \neq 0$ والمعادلة الديكارتية للمستقيم تكون من الشكل : $a\,x+c=0$ أي : $x=-\frac{c}{a}$
شعاع التوجيه لهذا المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ ولدينا : $u=a.i$ معناه أن هذا المستقيم يوازي حامل محور التراتيب.

نتيجة :

يكون مستقيم موازيا لحامل محور التراتيب إذا وفقط إذا كانت له معادلة من الشكل $x=a$ حيث a ثابت حقيقي.

02. إذا كان $b \neq 0$ لدينا شعاع توجيهه المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ و ولدينا : $\vec{u} = -b\vec{v}$ حيث $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$

نتيجة : $y = \alpha x + \beta$ معادلة للمستقيم (Δ) معناه أن $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ)

03. إذا كان المعلم متعامد ومتجانس معامل التوجيه لمستقيم يدعى كذلك ميل هذا المستقيم

تمرين 68 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.

(D) مستقيم معادلته $3x - 5y = 7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

تمرين 70 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.

(D) مستقيم معادلته $3x = -7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، هل للمستقيم (D) معامل توجيه ؟

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

تمرين 71 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث: $(D_1) : y = 3x$ ؛ $(D_2) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ؛ $(D_3) : x = -4$ ؛ $(D_4) : y = -\frac{3}{2}x + 7$ ؛ $(D_5) : y = 3$.

الحل :

$(D_1) : y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

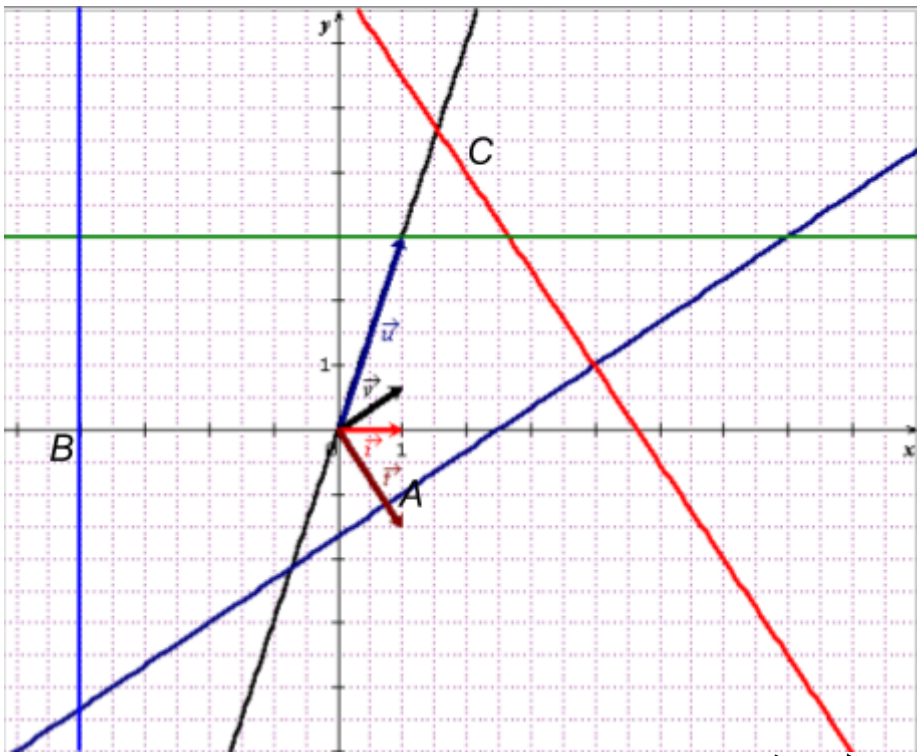
ويشمل النقطة $O(0\ ;\ 0)$

$(D_2) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $A(1\ ;\ -1)$

$(D_3) : x = -4$



شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(-4\ ;\ 0)$

(D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2\ ;\ 4)$

(D_5) : $y=3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0\ ;\ 3)$

تمرين 73 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.

لتكن النقطة $A(3\ ;\ -2)$ والشعاع $u=2i-j$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و u شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 : لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ معناه أن : $(x-3)=2(y+2)$ - ومعناه أن : $x+2y+1=0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax+by+c=0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b=-2$ و $a=-1$ إذن : $-x-2y+c=0$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $c=0+4+3$ -

ومنه : $c=-1$ إذن : المعادلة هي : $-x-2y-1=0$

الطريقة 3 : شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم ومنه : معادلته هي : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$y=-\frac{1}{2}x+b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2=-\frac{1}{2}\times 3+b$ أي : $b=-\frac{1}{2}$ ومنه : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

تمرين 76 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.

1) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

2) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

1) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b=-6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

2) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .
إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(-4\ ;\ 0)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(0\ ;\ -6)$

3. شرط توازي مستقيمين

نشاط 2 :

1) $(D) : a\,x + b\,y + c = 0$ و $(D') : a'x + b'y + c' = 0$. بين أن $(D) // (D')$ يكافئ : $ab' = a'b$

2) $(D) : y = \alpha x + \beta$ و $(D') : y = \alpha' x + \beta'$. بين أن $(D) // (D')$ يكافئ : $(\alpha = \alpha')$

حل النشاط :

1) $(D) // (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن : $-a'b = -ab'$ أي : $ab' = a'b$

2) $(D) // (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن $(\alpha = \alpha')$

مبرهنة 1 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $a\,x + b\,y + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ على الترتيب.
يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان $ab' = a'b$

مبرهنة 2 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $y = \alpha x + \beta$ و $y = \alpha' x + \beta'$ على الترتيب.
يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه (أي : $\alpha = \alpha'$)

تمرين 75 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$. (D) مستقيم معادلته $y = \sqrt{2}x - 3$
أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y = \sqrt{2}x + b$
إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4\ ;\ 0)$ إذن : $0 = \sqrt{2} \times 4 + b$ أي : $b = -4\sqrt{2}$
ومنه معادلة (D') هي : $y = \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$

تمرين 77 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ i\ ;\ j)$.
بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

1) $(D) : 2x - 3y = 1$ و $(D') : -x + \frac{3}{2}y = 0$

2) $(D) : -3x + 7 = 0$ و $(D') : x - \frac{\sqrt{3}}{5} = 0$

الحل :

1) $(D) : 2x - 3y = 1$ و $(D') : -x + \frac{3}{2}y = 0$

$(D) // (D')$ يكافئ : $2 \times \frac{3}{2} = (-1) \times (-3)$ أي : $3 = 3$ و هذا صحيح

2) $(D) : -3x + 7 = 0$ و $(D') : x - \frac{\sqrt{3}}{5} = 0$

لدينا : $0 = 0 \times (-3) = ab'$ و $0 = 1 \times 0 = ba'$ إذن : $ab' = a'b$ معناه : $(D) // (D')$