5. شفعية دالة :

نشاط 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على مجموعة D من $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f: x \mapsto x^2 - 1$ و $g: x \mapsto x^3 - x$ والشكل المقابل يبين منحنى الدالتين الممثلين في معلم متعامد .

نعتبر D مجموعة من المجموعات التالية: $\mathbb{R}$ ؛ $\mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3} \; ; \; \sqrt{3}\right\}$ ؛ $[-1 \; ; 1]$ ؛ $]-\infty \; ; \; -2[\cup]2 \; ; \; +\infty[$

1) بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$ ما القول عن المجموعة D .

2) قارن $f(x)$ و $f(-x)$ ثم $g(x)$ و $g(-x)$ وهذا من أجل $x \in D$.

3) M و M' نقطتان من أحد المنحنيين فاصلتيهما x و $-x$ على الترتيب حيث $x \in D$ ، بين أن النقطة M' صورة النقطة M بتناظر مطلوب عناصره في كل حالة من الحالتين.

4) ما هي الخصية الهندسية التي يتميز بها كل منحنى ؟

حل النشاط :

1) بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$ ما القول عن المجموعة D .

- $D = \mathbb{R}$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x له معاكس و هو العدد الحقيقي $-x$ أو نقول أن العدد 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$.
- $D = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3} \; ; \; \sqrt{3}\right\}$

$x \in \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3} \; ; \; \sqrt{3}\right\}$ معناه $x \neq -\sqrt{3}$ و $x \neq \sqrt{3}$ يكافئ $-x \neq \sqrt{3}$ و $-x \neq -\sqrt{3}$ معناه $-x \in D$

- $D = [-1 \; ; 1]$

$x \in [-1 \; ; 1]$ معناه $-1 \leq x \leq 1$ يكافئ أن $-1 \leq -x \leq 1$ معناه أن $-x \in [-1 \; ; 1]$

- $D =]-\infty \; ; \; -2[\cup]2 \; ; \; +\infty[$

$x \in]-\infty \; ; \; -2[\cup]2 \; ; \; +\infty[$ معناه أن : $x \leq -2$ أو $x \geq 2$ ويكافئ $-x \geq 2$ أو $-x \leq -2$ ومعناه أن : $-x \in]-\infty \; ; \; -2[\cup]2 \; ; \; +\infty[$

في كل حالة نقول عن المجموعة D أنها متناظرة بالنسبة إلى العدد 0

2) قارن $f(x)$ و $f(-x)$ ثم $g(x)$ و $g(-x)$ وهذا من أجل $x \in D$.

ليكن $x \in D$:

- $f(x) = x^2 - 1$ معناه أن $f(-x) = (-x)^2 - 1$ ويكافئ $f(-x) = x^2 - 1$ معناه أن : $f(-x) = f(x)$
- $g(x) = x^3 - x$ معناه $g(-x) = -x^3 + x$ يكافئ $g(-x) = -(x^3 - x)$ ويعني أن $g(-x) = -g(x)$

3) M و M' نقطتان من أحد المنحنيين فاصلتيهما x و $-x$ على الترتيب حيث $x \in D$ ، بين أن النقطة M' صورة النقطة M بتناظر مطلوب عناصره في كل حالة من الحالتين.

- M و M' نقطتان من منحنى الدالة f إذن : $M(x\,;\,f(x))$ و $M'(-x\,;\,f(-x))$ بما أن :
$f(-x)=f(x)$

للنقطتين فاصلتين متعاكستين ونفس الترتيب إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب
ومنه : النقطة M' صورة النقطة M بالتناظر المحوري بالنسبة إلى محور التراتيب

- M و M' نقطتان من منحنى الدالة f إذن : $M(x\,;\,g(x))$ و $M'(-x\,;\,g(-x))$ بما أن :
$g(-x)=-g(x)$

للنقطتين فاصلتين متعاكستين وترتيبين متعاكسين إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم.
ومنه : النقطة M' صورة النقطة M بالتناظر المركزي مركزه مبدأ المعلم.

4) ما هي الخصية الهندسية التي يتميز بها كل منحن ؟
منحنى الدالة f متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب ومنحنى الدالة g متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

تعريف : D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، f دالة معرفة على D .

- نقول عن الدالة f أنها زوجية إذا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى 0
وكان لكل x من D ، $f(-x)=f(x)$
- نقول عن الدالة f أنها فردية إذا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى 0
وكان لكل x من D ، $f(-x)=-f(x)$

ملاحظات :

- التمثيل البياني لدالة زوجية في مستو منسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب .
- التمثيل البياني لدالة فردية في مستو منسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

تمرين : 49 صفحة 78 أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}$:

$f:x\mapsto x^2-1$ ، $g:x\mapsto x^2+3x$ ، $h:x\mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ ، $t:x\mapsto -x^3+x$

الحل :

كل الأعداد الحقيقية متناظرة بالنسبة إلى 0 .

- $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$ إذن الدالة f زوجية.
- $g(-x)=(-x)^2+3(-x)=x^2-3x$ ومنه : $g(-x)=g(x)$ و $g(-x)=-g(x)$
وبالتالي الدالة g ليست زوجة ولا فردية.
- $h(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-h(x)$ إذن الدالة h فردية.
- $t(-x)=-(-x)^3+(-x)=x^3-x=-(x^3+x)=-t(x)$ إذن الدالة t فردية.

تمرين : 50 صفحة 78 أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}^*$:

$f:x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ ، $g:x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ ، $h:x\mapsto x+\dfrac{1}{x^2}$ ، $t:x\mapsto x^2+\dfrac{1}{x^2}$

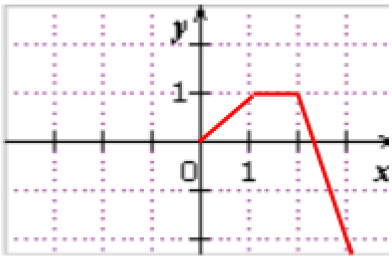
الحل :

كل عدد حقيقي غير معدوم له نظير بالنسبة إلى 0.

- $f(-x)=-\dfrac{1}{(-x)^2}=-\dfrac{1}{x^2}=f(x)$ إذن الدالة f زوجية.
- $g(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-(x+\dfrac{1}{x})=-g(x)$ إذن الدالة g فردية.

- $h(-x)=-x+\frac{1}{(-x)^2}=-x+\frac{1}{x^2}$ ومنه : $h(-x)\neq h(x)$ و $h(-x)\neq -h(x)$
إذن الدالة h ليست زوجية ولا فردية.
- $t(-x)=(-x)^2+\frac{1}{(-x)^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=t(x)$ إذن الدالة t زوجية.

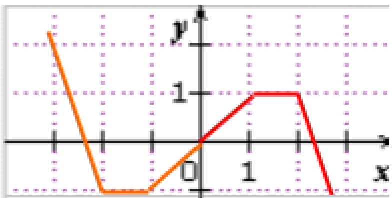
تمرين : 51 صفحة 78



الشكل المقابل يمثل جزءا من المنحني الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.
أكمل الرسم ، بفرض :
- الدالة f فردية.
- الدالة f زوجية.

الحل :
- الدالة f فردية.

المنحني يكون متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.



- الدالة f زوجية.

بما أن المعلم متعامد فإن المنحني يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب