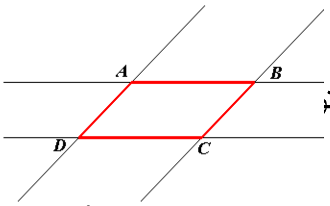
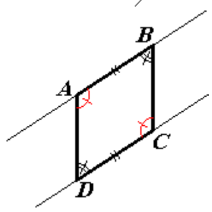
1. متوازي الأضلاع



تعريف:

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه مت

خواص:

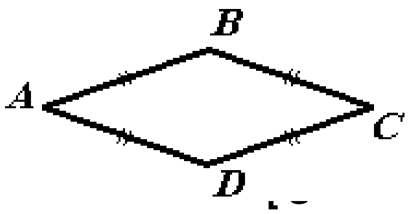


من أجل كلّ رباعي $ABCD$

1. $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. $[AB = DC$ و $AD = BC]$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.
3. $[AB = DC$ و $(AB)\parallel(DC)]$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.
4. $[\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ و $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}]$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.

1.1. متوازيات الأضلاع الخاصية

1.1.1. المعيّن:



هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان.

خواص:

1. $ABCD$ معيّنا معناه $[(AC)\perp(BD)$ و $[\quad]$ $[AC]$ $[BD]$
2. $ABCD$ معيّنا معناه $[AB = BC = CD = DA]$
3. إذا كان $ABCD$ معيّنا فإنّ $[(AC)$ ينصف كلاّ من الزاويتين $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$
و (BD) ينصف كلاّ من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}]$

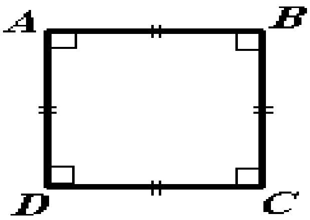
2.1.1. المستطيل:

هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة.

خواص:

1. $ABCD$ مستطيل معناه $[\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°]$
2. $ABCD$ مستطيل معناه $[AC = BD$ و $[AC]$ ،

3.1.1. المربّع:



هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

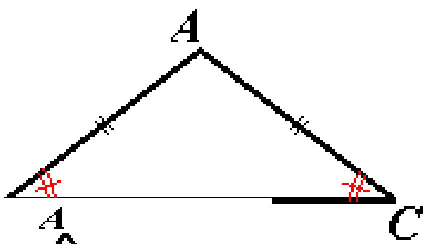
خواص:

1. $ABCD$ مربّع معناه $[\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ و A
2. $ABCD$ مربّع معناه $[AC = BD$ و $(AC)\perp(BD)$ و $[AC]$ $[BD]$ متناصفان$]$

2. المثلثات، والمستقيمات الخاصية في مثلّث

1.2. المثلثات الخاصية

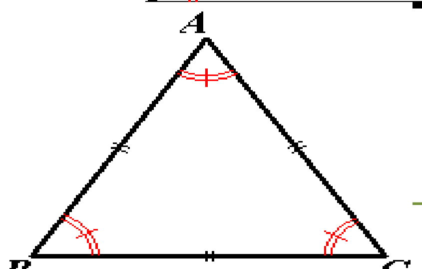
1.1.2. المثلّث متساوي السّاقين



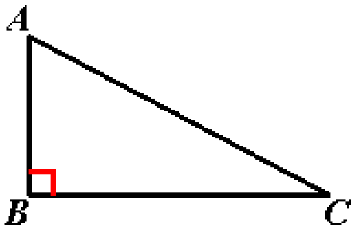
- فيه ضلعان متقايسان
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

2.1.2. المثلّث متقايس الأضلاع

- أضلاعه متقايسة



- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60°$

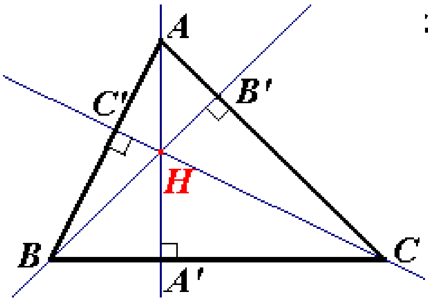


3.1.2. المثلّث قائم الزاوية

- فيه زاوية قائمة
- $\widehat{ABC} = 90°$

2.2. المستقيمات الخاصية في مثلّث

1.2.2. الارتفاع

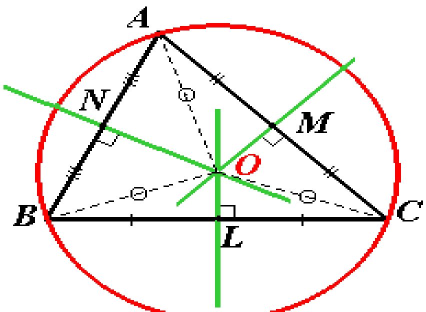


الارتفاع في مثلّث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثل
ويعامد الضّلع المقابل

A_{ABC} مساحة المثلث ABC تحقق

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} AA' \times BC$$
$$= \frac{1}{2} BB' \times AC$$
$$= \frac{1}{2} CC' \times AB$$

2.2.2. المحور

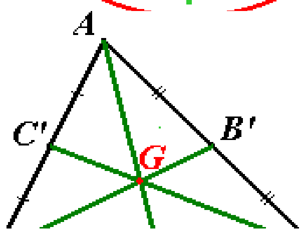


المحور في مثلّث هو محور أحد أضلاعه.

- $OA = OB = OC$
- محاور مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع محاور مثلّث هي مركز الدّائرة المحيطة بهذا

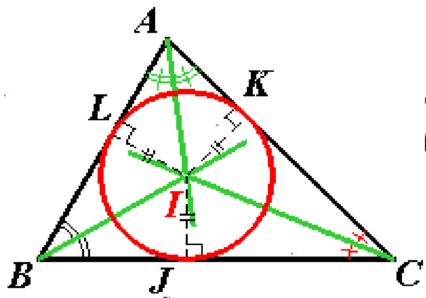
3.2.2. المتوسط

المتوسط في مثلّث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثل



- $GA = 2GA'$ ، $GB = 2GB'$ ، $GC = 2GC'$
- متوسطات مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع متوسطات مثلّث هي مركز ثقل هذا المثلّث.

4.2.2. المنصّف



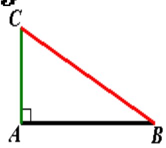
المنصف في مثلّث هو منصّف إحدى زواياه.

- المنصّفات الدّاخلية في مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع المنصّفات الدّاخلية في مثلّث هي مركز الدّائر
المرسومة داخل هذا المثلّث(أي التّي تمسّ أضلاع المثلّث من

3. مبرهنة فيثاغورس - النّسب المثلّثية

1.3. مبرهنة فيثاغورس وعكسها

مبرهنة: (مبرهنة فيثاغورس)



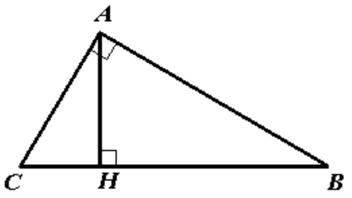
إذا كان ABC مثلّثا قائما في A فإنّ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

مبرهنة: (عكس مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان في مثلّث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإنّ المثلّث ABC قائم في A.

نتائج:

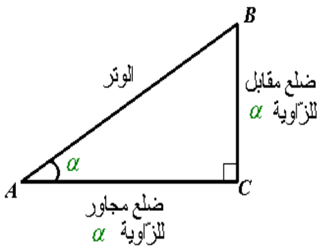
إذا كان ABC مثلّثا قائما في A ، و (AH) الارتفاع المتعلّق بالضّلع $[BC]$ فإنّ:



1. $AB \times AC = AH \times BC$
2. $AB^2 = BH \times BC$
3. $AC^2 = CH \times CB$
4. $AH^2 = HC \times HB$

2.3. النّسب المثلّثية في مثلّث قائم

تعريف:



ABC مثلّث قائم في C

- جيب الزّاوية α: $\sin = \frac{BC}{AB}$
- جيب تمام الزّاوية α: $\cos = \frac{AC}{AB}$ ،
- ظل الزّاوية α: $\tan = \frac{BC}{AC}$.

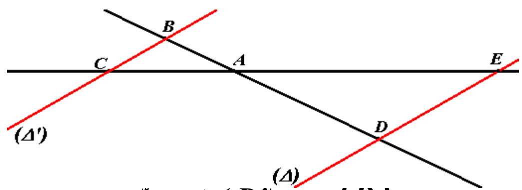
خواص:

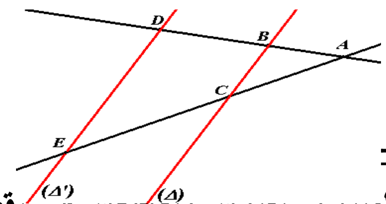
أ. من التّعريف نجد أنّ: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

ب. باستعمال مبرهنة فيثاغورس يمكن أن نبيّن أنّ: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

4. مبرهنة طالس

1.4. مبرهنة طالس وعكسها





مبرهنة: (مبرهن)

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان (D) و (D') في النّقط B ، C ، D ، E

حسب أحد الشّكلين أعلاه، وكان (D) يوازي ، (D') فإنّ:

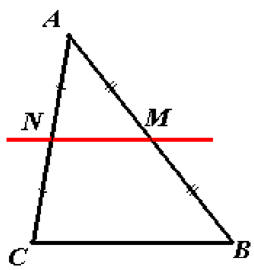
أطوال أضلاع المثلّث ABC متناسبة مع أطوال الأضلاع الموافقة لها من المثلّث ADE

أي: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

مبرهنة: (عكس مبرهنة طالس)

إذا كانت كلّ من النقط A ، B ، D والنّقاط A ، C ، E على استقامة واحدة وبنفس التّرتيب حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ، فإنّ: (EC) يوازي (CB)

حالة خاصة: مستقيم المتنصفين في مثلث



ABC مثلّث كيفي M و N نقطتان من (AB) و (AC) على التّرتيب

- إذا كانت النّقطتان M و N منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التّرتيب

فإنّ: $(MN) \parallel (BC)$ و $MN = \frac{1}{2} BC$

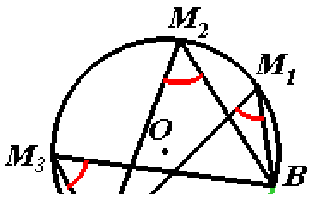
- إذا كانت النّقطة M منتصف $[AB]$ وكان $(MN)\parallel(BC)$ فإنّ N منتصف $[AC]$

5. الزّوايا والدّائرة

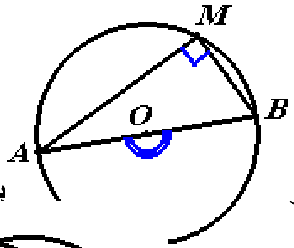
مبرهنة:

في كلّ دائرة، الزّاوية المركزيّة تساوي ضعف الزّاوية المحيطيّة التّي تحصر معها نفس القوس.

نتائج:

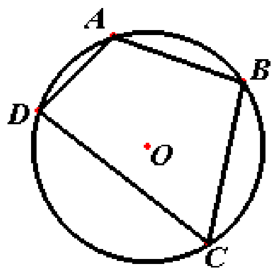


1. **الزّوايا المحيطيّة، في دائرة، التّي تحصر نفس القو**
أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة.



2. **عندما تكون نقطتان A ، B من دائرة متقابلتين قط**
و M نقطة من نفس الدّائرة وتختلف عن A و B
فإنّ المثلّث ABM قائم في M .

بن:



3. **تكون رؤوس الرّباعي المحدّب $ABCD$ من نفس الدّائر**

أ. $D\widehat{B}C = D\widehat{A}C$

ب. الزّاويتان $B\widehat{A}D$ و $B\widehat{C}D$ متكاملتان.

6. المثلّثات المتقايسة

1.6. تقايس مثلّثين

تعريف:

نقول عن مثلثين إنـهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

نتيجة:

المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثني، وزواياهما متقايسة مثنى مثنى.

خواص :

1. **يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثني.**
2. **يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلّثين مع زاوية والضلعين اللّذين يحصرانها من المثلّث الآخر.**
3. **يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزّاويتان المجاورتان له من أحد المثلّثين مع ضلع والزّاويتين المجاورتين له من المثلّث الآخر.**
4. **يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلّث الآخر بانسحاب، أو تناظر محوري أو تناظر مركزي أو دوران.**

7. المثلّثات المتشابهة

1.7. تشابه مثلّثين

تعريف:

نقول عن مثلثين إنّهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مبرهنة:

المثلّثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

خواص :

1. **يتشابه مثلّثان إذا تقايست زاويتان من أحدالمثلّثين مع زاويتين من المثلّث الآخر.**

2. يتشابه مثلّثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلّثين مع زاوية من المثلّث الآخر، وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى هاتين الزاويتين متناسبين مع طولي الضّلعين الذين يحصران الزّاوية الآخرى.
3. يتشابه مثلّثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

2.7. نسبة تشابه مثلّثين

تعريف:

ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثان متشابهين

نسميّ نسبة تشابه هذين المثلّثين العدد الموجب غير المعدوم k حيث:

$$k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

ملاحظات:

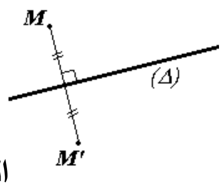
لتكن k نسبة تشابه مثلّثين ABC و $A'B'C'$ حيث $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$.

1. إنّ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه للمثلّثين ABC و $A'B'C'$.
2. إذا كان $0 < k < 1$ فان المثلّث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلّث ABC ونسميّ k نسبة (أو معامل) التّصغير.
3. إذا كان $k > 1$ فان المثلّث $A'B'C'$ هو تكبير للمثلّث ABC ونسميّ k نسبة (أو معامل) التّكبير.
4. إذا كان $k = 1$ فان المثلّث $A'B'C'$ يقايس للمثلّث ABC.

8. التّحويلات النّقطية

1.8. التناظر المحوري

تعريف:

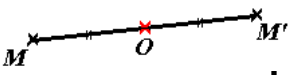


(Δ) مستقيم ثابت، التّناظر المحوري بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة M' حيث:

- إذا كانت M لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ (Δ) محور قطعة المستقيم $[MM']$.
- إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ $M = M'$.

2.8. التناظر المركزي

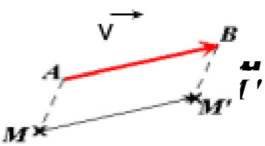
تعريف:



O نقطة ثابتة ، التّناظر المركزي بالنّسبة إلى النّقطة O هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة M' حيث O منتصف قطعة المستقيم $[MM']$.

3.8. الانسحاب

تعريف:

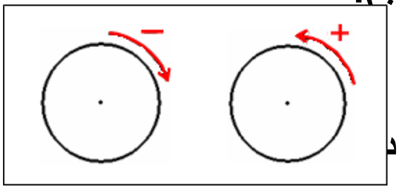


$\vec{v}$ شعاع ثابت ، الانسحاب الذّي شعاعه $\vec{v}$ هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة M' حيث: $\vec{MM'} = \vec{v}$

4.8. الدّوران

1.4.8. توجيه المستوي

لتكن (C) دائرة من المستوي، يمكن أن نحدّد على الدّائرة (C) اتجاهين أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب السّاعة ويسمّى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب)، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب السّاعة ويسمّى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السّالب).



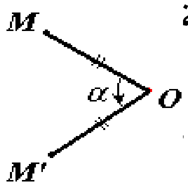
تعريف:

توجيه المستوي يعني اختيار اتجاه واحد عل كلّ د

2.4.8. الدّوران

تعريف:

O نقطة ثابت من مستوي موجّه ، و a زاوية معلومة. الدّوران الذّي مركزه النّقطة O وزاويته a في الاتجاه المباشر هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة



- **إذا كانت $M = O$ فإنّ $M' = O$**
- **إذا كانت $M \neq O$ فإنّ $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = a$ والثلاثية $M')$ ...ة.**

5.8. خواص التّحويلات النّقطية

1.5.8. النّقط الصامدة

تعريف:

نقول عن نقطة إنّها صامدة بتحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

أمثلة:

- التّناظر المحوري الذي محوره مستقيم (Δ) يقبل كلّ نقط هذا المستقيم نقطا صامدة.
- التّناظر المركزي الذي مركزه نقطة A يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A نفسها.
- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- الدّوران الذّي مركزه نّقطة O وزاويته a (حيث $\alpha \neq 2k\pi$ و k عدد صحيح) يقبل نقطة صامدة وحيدة هي مركزه O .

2.5.8. حفظ المسافات (التقايس)

تعريف:

يسمّي التّحويل الذّي يحافظ على المسافات تقايسا.

مبرهنة:

كلّ من التّناظر المحوري، والتّناظر المركزي، والانسحاب، والدّوران يحافظ على المسافات.

3.5.8. حفظ الاستقامية

مبرهنة:

إذا كانت A، B، C ثلاث نقط في استقامية فإنّ صورها A'، B'، C' بتقايس تكون في استقامية.

نتيجة:

صورة مستقيم بتقايس(تناظر محوري، تناظر مركزي، انسحاب، دوران) هو مستقيم.

4.5.8. حفظ أقياس الزّوايا

مبرهنة:

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

<u>نتيجة:</u>

- إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ صورتيهما بتقايس متوازيان أيضا.
- إذا كان مستقيمان متعامدين فإنّ صورتيهما بتقايس متعامدان أيضا.