الكفاءات المستهدفة

- إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة .
- قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.
- الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة إحصائية .
- حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر .
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة .
- استعمال أشجار مرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية .
- التحقق من استقلال حادثتين .
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة و استعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة و مستقلة

عند رمي قطعة نقود متوازنة ، الدراسة النظرية تؤكد أن للوجه حظا واحدا من بين حظين أي عند رمي قطعة نقود مرتين متتابعتين فإن الوجه سيظهر مرة واحدة وعند رمي القطعة أربعة رميات متتابعة سيظهر الوجه مرتين...هذا مادام حظ ظهور الوجه هو نفسه حظ ظهور الظهر لكن عمليا لا يمكن الجزم بهذا ، إذ يمكن في الرميات الأربعة أن لا يظهر الوجه أبدا ... !

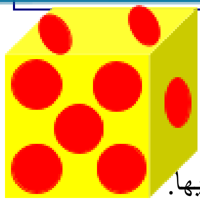
نفس الشيء بالنسبة لحجر نرد عادي . للرقم 5 مثلا حظ من بين 6 حظوظ كي يظهر في رمية واحدة أي في ستة رميات متتابعة سيظهر الرقم 5 مرة واحدة هذا نظريا ، لكن عمليا يمكن خلال الرميات الستة المتتابعة أن لا يظهر الرقم 5 و لو مرة واحدة ...!

هذه الإشكاليات و غيرها تختفي كلما كان عدد الرميات أكبر و أكبر .

قال أوندري كولموغوروف (1903 – 1987)

": إن قرار الإبيستمولوجيا في علم الاحتمال يرتكز على أساس أن الظواهر العشوائية بجوار الأعداد الكبيرة و الكبيرة جداً تولّد الصرامة و الانضباط أو أن العشوائية تتلاشى بكيفية ما . "

النشاط الأول



نرمي حجر نرد متوازن رمية واحدة و نسجل الرقم على الوجه العلوي .

1) ماهي القيم التي يمكن الحصول عليها ؟

2) نرمي حجر النرد هذا مرتين متتابعتين و نسجل في كل مرّة مجموع الرقمين المحصل عليهما.

- ماهي القيم الناتجة ؟

3) نرمي حجر النرد هذا الآن ثلاث رميات متتابعة و نسجل في كل مرّة مجموع الأرقام المحصل عليها.

- ماهي القيم الناتجة ؟

النشاط الثاني

يضم صندوق 5 كرات متشابهة مرقمة من 0 إلى 4 .
1) نسحب كرتين في آن واحد و نسجل مجموع رقميهما .
أ) ما هو عدد النتائج التي يمكن الحصول عليها؟
ب) بيّن أن أصغر وأكبر نتيجتين يمكن الحصول عليهما هما 1 و 7 على الترتيب .
ج) ما هي النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها ؟
2) أ) ما هو عدد الطرق للحصول على 5 ؟
ب) بين أن احتمال الحصول على 5 هو $\frac{1}{5}$ (**نسبة عدد طرق الحصول على 9 الى عدد الطرق الكلية**)
3) أكمل الجدول التالي

النتائج المحصل عليها x_i	**7**	**...**	**5**	**....**	**1**
احتمال كل نتيجة محصّل عليها $P(x_i)$		...	$\frac{1}{5}$	....	

4) أحسب الوسط الحسابي و التباين للتوزيع الناتج .

النشاط الثالث

حجر نرد أوجهها تحمل الأرقام التالية 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 . يرميه لاعب رميتين متتابعتين و يسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل رمية . Y ، X لاعبان . يريد X أن يكون ربحه هو مجموع الرقمين المحصل عليهما (دينار)
ويريد Y أن يكون ربحه هو جداء الرقمين المحصل عليهما .
1) عرّف قانوني الاحتمال لكل من X و Y .
2) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين لكل من X و Y .
3) أي الطريقتين مربحة أكثر لصاحبها ؟

النشاط الرابع

الأنشطة

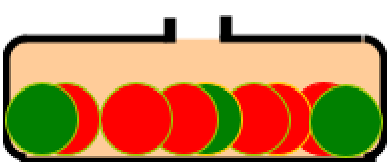
في ثانوية ما ، 25 % من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15 % منهم مستواهم ضعيف في مادة الفلسفة
و 10 % مستواهم ضعيف في المادتين معا . نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية :
1) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الفلسفة ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا ؟
2) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفلسفة أيضا ؟
3) ما إحتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفلسفة ؟

النشاط الخامس

يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 1/3 . نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة .
أحسب ل إحتمال الحصول على وجه . (يمكنك تشكيل شجرة الإمكانيات)

النشاط السادس

يضم صندوق 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع
لتكن الحادثةA " الكرة الأولى حمراء " و الحادثة B" الكرة الثانية خضراء "



1) أحسب $P(A)$ ،
2) أحسب $P_A(B)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية خضراء علما أن الكرة الأولى قد سحبت حمراء

3) استنتج $P(A\cap B)$ احتمال الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء

4) هل $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

النشاط السابع

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 . نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع .

1- أحسب إحتمال الحوادث التالية : A " الكرتان تحملان رقمين فرديين " ، B " الكرتان من نفس اللون " C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ (أي وقوع إحداهما يؤثر في وقوع الأخرى)

2- ما إحتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال الحادثة أن يكون رقماهما فرديين ؟

محاكاة تجربة عشوائية- تذبذب العينات

الدرس

- **تجربة عشوائية :**

نقول عن تجربة أنها عشوائية عندما لا يمكن أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجاز ها.

ملاحظة : سنختار في كل الأنشطة ، تجارب تكون لنتائجها نفس حظوظ الظهور.

- **عينة :** نسمي عينة مقاسها n ، كل سلسلة إحصائية مشكلة من النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة n مرة وفي نفس الظروف.

- **المحاكاة :**

نقول أننا قمنا بمحاكاة تجربة عشوائية ، عندما نختار نموذجا لها وسندا ماديا نحققها باستعماله.

دراسة مثال (دون استعمال مجدول)

نعتبر التجربة العشوائية :

نسحب عشوائيا دون الإعادة قبل السحب الموالي ، قريصة من كيس يحتوي على 4 قريصات مرقمة من 1 إلى4.

- **العمل داخل القسم أو خارجه**

النتائج الممكنة	1	2	3	4
التكرار				
التواتر				

يكرر كل تلميذ هذه التجربة 10 مرات (كل تلميذ يتحصل عندئذ على عينة مقاسها 10) و يتمم الجدول الآتي و يمثل التواترات بيانيا.

- **العمل داخل القسم**

نفرض أن عدد تلاميذ القسم هو30.

يجمع الأستاذ نتائج تلميذين (عينة مقاسها 20) ثم نتائج ثلث القسم(عينة مقاسها 100) و أخيرا نتائج كل القسم (عينة مقاسها 300) كي يتمم مع تلاميذه الجدول التالي:

	النتائج الممكنة	1	2	3	4
العينة 20	التكرارات				
	التواترات				

العينة 100	التكرارات				
	التواترات				
العينة 300	التكرارات				
	التواترات				

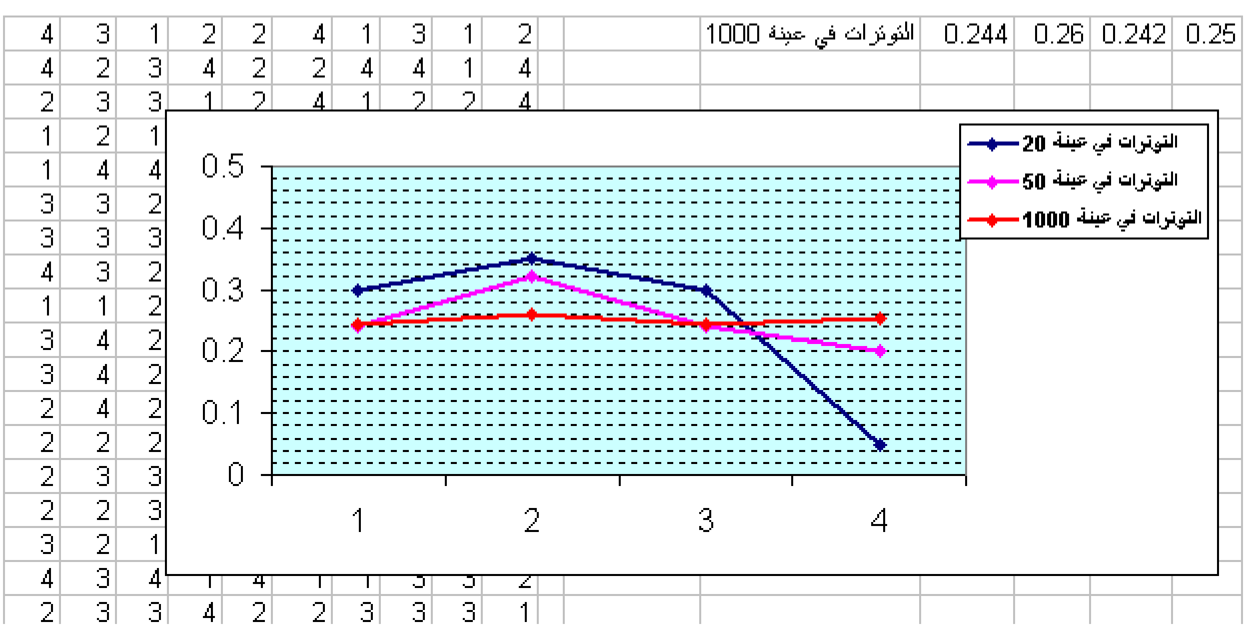
يمثل الأستاذ التواترات بيانيا ثم يفتح المناقشة مثلا بالسؤال : ماذا تلاحظ بالنسبة لكل عيّنة ؟ وهذا بغرض استدراج التلاميذ إلى ملاحظة:

- تغير التكرارات من عيّنة إلى أخرى
- استقرار العيّنة كلّما كبر مقاسها

محاكاة باستعمال المجدول إكسال

- أحجز أعداد عشوائية : 1 ، 2 ، 3 ، 4 بواسطة =ENT(ALEA()*4+1) من الخلية A1 إلى الخلية 50J1 (تحصل على 1500 عددا عشوائيا) .
- في الخلايا من N1 إلى Q1 نسجل عدد النتائج الممكنة للأعداد : 1 ، 2 ، 3 ، 4 .
- عين التوترات في عينة مقاسها 20 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$2;N1)/20 في الخلية N2 و ثم سحب الفأرة من N2 إلى Q2.
- عين التوترات في عينة مقاسها 50 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$5;N1)/50 في الخلية 3N و ثم سحب الفأرة من 3N إلى 3 Q.
- عين التوترات في عينة مقاسها 1500 باستعمال =NB.SI($A$1:$J$150;N1)/1500 في الخلية 4N و ثم سحب الفأرة من 4N إلى 4 Q.
- نحدد الخلايا من M1 إلى Q4 و نمثل التواترات بيانيا باستعمال المساعد البياني .

وأخيرا : نضغط على اللمسة F9 كي نشاهد تذبذب العينات و ملاحظة التواترات تؤول إلى وضعية استقرار (و هو سبيل ممكن للتطرق إلى مفهوم الاحتمال).



قانون إحتمال لتجربة عشوائية

الدرس

عند القيام بتجربة عشوائية حصلنا على n نتيجة $x_1, x_2, \ldots, x_n$. كرّرنا التجربة عددا كبيرا من المرّات

x_i	x_1	.....	x_n
p_i	p_1	.....	p_n

x_i	x_1	.....	x_n
f_i	f_1	.....	f_n

فكانت التواترات كما يلي تئول التواترات النظرية إلى احتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_n$ حيث $0 \le p_i \le 1$

و $\sum_i P_i = 1$

مثال : يضم كيس 5 كرات متماثلة ، 3 منها بيضاء ((B و الباقي سوداء(N). نسحب كرتين عشوائيا و نعتبر X عدد الكرات البيضاء المحصل عليها ، نريد تعريف قانون الاحتمال لـ X في كل من الحالات التالية :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

1) **السحب المتزامن (في آن واحد)** : هنا لا يهم الترتيب و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو **10** ، كلهم

من الشكل $\{(N;N),(N;B),(B;B)\}$ و منه $p(N;N)=p(X=0)=\frac{1}{10}$

$p(N;B)=p(X=1)=\frac{6}{10}$ ، $p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{10}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

2) **السحب على التوالي دون إرجاع** : هنا الترتيب مهم و التكرار غير مسموح و عليه فعدد المخارج الكلي هو **20** (
لسحب الكرة الأولى دلينا **5** اختيارات و إذا ما أردنا سحب الكرة الثانية نجد أمامنا **4** اختيارات مادام الأولى لم تعاد إلى الكيس

و بالتالي **20** = **4** × **5**) إذن $p(N;N)=p(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$

$$p((N;B),(B;N))=p(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{12}{20}$$

$$p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$$

3) **السحب على التوالي مع الإرجاع :** هنا الترتيب مهم و التكرار مسموح (مادام الكرة المسحوبة تعاد إلى الكيس فيمكن سحبها في المرة الثانية و عليه فأمامنا **5** اختيارات كلما أردنا سحب كرة و بالتالي فعدد المخارج الكلي $5\times5=25$)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{20}$

$$p(N;N)=p(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25} \quad ، \quad p((N;B),(B;N))=p(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$$

$$p(B;B)=p(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

□ الأمل الرياضياتي و التباين لقانون احتمال

تعريف

□ **الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل** μ **حيث** $\mu=p_1x_1+p_2x_2+.....+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}P_ix_i$

□ **التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث** $V=\sum_{i=1}^{n}P_i(x_i-\mu)^2$ ، **الانحراف المعياري هو** $\sigma=\sqrt{V}$

ملاحظات : ① كما في الإحصاء يميز العدد V تشتت القيم حول المعدل μ

② يمكن حساب V بالدستور $V=\sum_{i=1}^{n}P_ix_i^2-\mu^2$

خواص : ❶ عند إضافة عدد ثابت a لكل القيم x_i يضاف a إلى الأمل الرياضياتي .

تمرين محلول 1 :

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

ـ ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

الحل : 1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عددا ممكنا

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرية المسحوبة لا ترجع)

ـ المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي

تمرين محلول 2 :

يدفع لاعبان A و B ، 6 و 10 دينارا على الترتيب و يرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 10 و يدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي
- أحسب أمل الربح لكل لاعب .

الحل :

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي $S=\{2,3,4,5,6,7,8\}$
باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين
يدفع اللاعب A ستة دنانير و يأخذ ضعف النتيجة و بالتالي
قيم الربح هي $E'=\{-2,0,2,4,6,8,10\}$
قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي

x_i	2-	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

و $\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$
الأمل الرياضياتي هو :

$$\mu=\frac{1}{16}\times(-2)+\frac{2}{16}\times(0)+\frac{3}{16}\times(2)+\frac{4}{16}\times(4)+\frac{3}{16}\times(6)+\frac{2}{16}\times(8)+\frac{1}{16}\times(10)=\frac{64}{16}=4$$

إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينارا .

لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم x_i للاعب A و بالتالي أمل ربحه $\mu'=\mu-4=0$
بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة (لا له و لا عليه)

↵ الإحتمالات الشرطية :

1. تعريف

لتكن A حادثة من مجموع المخارج Ω حيث $p(A)\neq 0$ **. نعرّف على Ω احتمالا جديدا يرمز له بالرمز** p_A

حيث من أجل كل حادثة B نكتب $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

p_A **يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة**

$p_A(B)=p(A/B)$ **و تقرأ " إحتمال B علما أن A محققة "**

مثال: صندوق يحوي **5** قريصات مرقمة بالأرقام **0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8** و **3** قريصات مرقمة بالأرقام **1 ، 3 ، 5**
لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع قريصتين من الصندوق
- ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

الحل:
نسمي A الحادثة " **القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا** " و الحادثة B " **القريصة الثانية تحمل رقما فرديا** "

واضح أن $p(A)=\frac{5}{8}$ و نريد حساب $p(A\cap B)$ حسب التعريف $p(A)\times p(B/A)$

لكن $p(B/A)$ هو احتمال سحب رقما زوجيا من الصندوق الذي لا يحوي إلا أربعة أرقام زوجية من بين 7 أرقام

أي $p(B/A)=\frac{4}{7}$ $P(B)$ $P_A(F)=P(A)\times P(A\cap F)$

و بالتالي $p(A\cap B)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

شجرة الإمكانيات :

مثال:

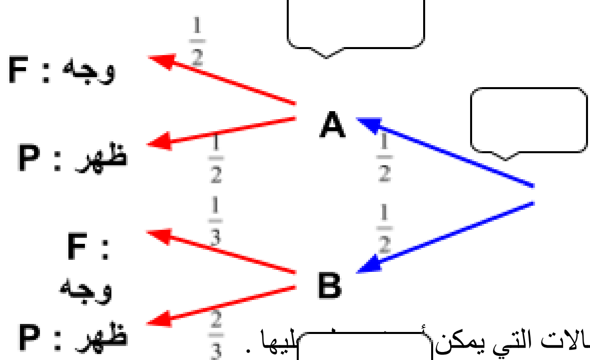
يضم صندوق قطعتي نقد .

- قطعة A عادية (تحمل وجه وظهر)
- القطعة B فمغشوشة

بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 1/3 .

نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق

و نرميها مرة واحدة .



- **المطلوب** : انجاز مخطط يوضح جميع الحالات التي يمكن أ... عليها .

باعتبار الحوادث A " رمي القطعة B ، " A " رمي القط... الحصول على وجه " ، P " الحصول علة ظهر "

$p(A)$ يعني احتمال رمي القطعة A أما $p(F)$: احتمال الحصول على وجه ،

طرائق و تمارين محلولة

تمرين محلول 1 :

(A) ، (B) ، (C) ثلاثة صناديق حيث :

الصندوق (A) يضم 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء

الصندوق (B) يضم كريتين حمراوين و كرية سوداء

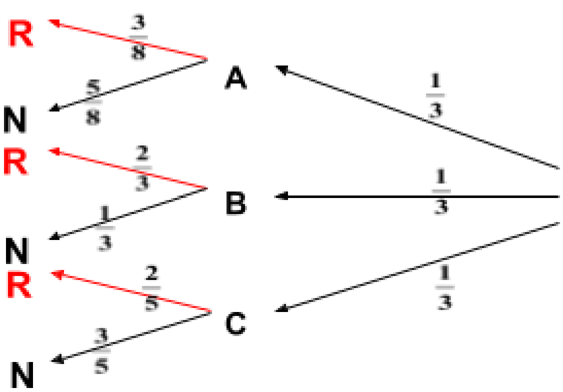
الصندوق (C) يضم كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة .

إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما هو إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق (A) ؟

الحل

نرمز للكرية الحمراء بالرمز **R** و الكرية السوداء بالرمز **N** و ننشئ المخطط (الشجرة أو العنكبوتية) التالي :



إحتمال أن نكون قد أخذنا الصندوق (A)

و سحبنا منه كرية حمراء هو : $P(A\cap R)$

$$P(A\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

و هناك ثلاثة مسارات تؤدي إلى كرية حمراء :

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$$

$$p_R(A)=\frac{p(A\cap R)}{p(R)}=\frac{1}{8}\div\frac{173}{360}=\frac{173}{45}$$

تمرين محلول 2 :

يضم صندوق كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء . نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نعيد عملية السحب مرة ثانية . أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A " يوجد ثلاث كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

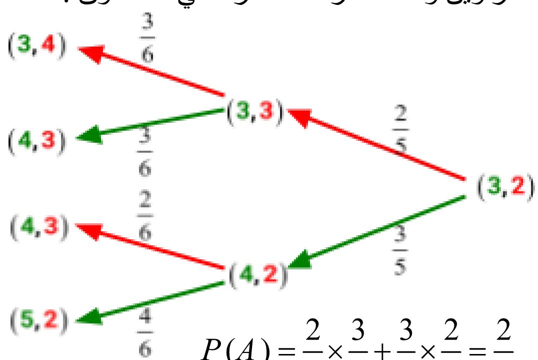
B " يوجد خمس كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "

الحل

نمثل محتويات الصندوق بالثنائية (2 ، 3) التي تعني وجود كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء في الصندوق .

إحتمال سحب كرة حمراء في السحبة الأولى هو $\frac{2}{5}$.
قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (3 ، 3) .

إحتمال سحب كرة خضراء في السحبة الأولى هو $\frac{3}{5}$.
قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (2 ، 4) .
نلخص العملية بالمخطط المقابل :



$$P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$$

إذن (باستعمال المسارات المؤدية إلى الثنائية (3 ، 4) ينتج

و بنفس الطريقة نجد : $P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$

الحوادث المستقلة

تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان

$$p(A\cap B) = p(A) \times p(B)$$

إذا كان $p(A)\neq 0$ فإن $p(B/A) = p(B)$

نتيجة : الحادثتان المستقلتان هما اللتان يكون وقوع إحداهما أو عدمه غير مؤثر في الأخرى .

مثال 1 :

- نرمي قطعة نقود مرتين متتابعتين . نتيجة الرمية الأولى لا تؤثر بحال من الأحوال في نتيجة الرمية الثانية
إذن : الرميتان هما عبارتان عن حادثتين مستقلتين .
- رمي حجر نرد n مرّة متتابعة . نتيجة كل رمية لا تتأثر بحال من الأحوال بالرميات الأخرى
إذن : الرميات كلها هي عبارة عن حادث مستقلة مثنى مثنى .

مثال 2 : لبنى و مروة أختان مجتهدتان تحضران نفسيهما لامتحان شهادة البكالوريا بكل جد .
قال الأستاذ لأبيهما لا شك أنهما ستنجحان في امتحان شهادة البكالوريا – إن شاء الله – إلا أن احتمال حصول لبنى على ملاحظة جيد هو 0,9 أما مروة فهو 0,5 .
نعتبر الحدثتين L " تحصل لبنى على ملاحظة جيد " ، M " تحصل مروة على ملاحظة جيد "

1) إحتمال حصول الأختين معا على ملاحظة جيد .

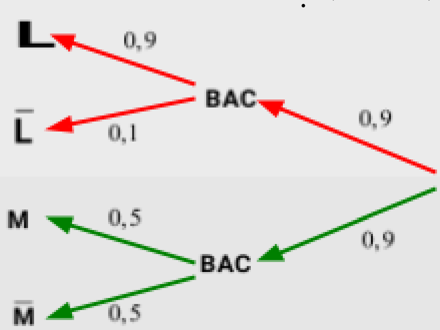
هو : بما أن الحادثتين L و M مستقلتان فإن $p(L\cap M)=p(L)\times p(M)=0,9\times 0,5=0,45$

2) إحتمال حصول إحدى الأختين فقط على ملاحظة جيد .

هو : $p\left[(L\cap\overline{M})\cup(\overline{L}\cap M)\right]=p(L)\times p(\overline{M})+p(\overline{L})\times p(M)=0,9\times 0,5+0,1\times 0,5=0,50$

لأن استقلال الحادثتين L و M يؤدي إلى استقلال الحادثتين $(L\cap\overline{M})$ و $(\overline{L}\cap M)$.

3) أب الأختين واقعي جدا ، قال لا نعرف ما يخبئه لنا الغد ،
فليكن احتمال نجاح كل منهما في شهادة البكالوريا أصلا هو 0,9 .
بناء على توقعات الأب و الأستاذ ،
- إحتمال حصول الأختين معا على ملاحظة جيد :
و اعتمادا على الشجرة المقابلة هو



الأحمر : لبنى

الأخضر : مروة

$$p\left[(B\cap L)\cap(B\cap M)\right]=p(B\cap L)\times p(B\cap M)$$
$$=0,9\times0,9\times0,9\times0,5=0,3645$$

تمرين محلول 1 : يضم كيس أربع كرات بيضاء و ثمان كرات حمراء .

-1 نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع . هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟

B_1 " الكرة الأولى بيضاء " ، B_2 " الكرة الثانية بيضاء "

-2 نسحب الآن عشوائيا كرتين على التوالي مع الإرجاع . هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟

الحل

1) $p(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

بما أن $\frac{1}{11}\neq\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ فإن الحادثتين B_1 و B_2 غير مستقلتين

2) $p(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}$ ، $p(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{9}$

بما أن $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ فإن الحادثتين B_1 و B_2 مستقلتان

تمرين محلول 2 :

يضم كيس ثلاث كرات بيضاء و كراتين حمراوين .

نسحب عشوائيا عددا من الكرات على التوالي دون إرجاع .

نعتبر الحوادث التالية : M " الكرتان مختلفتا اللون " ، N " كرة على الأكثر حمراء "

1) إذا كان عدد الكرا ت المسحوبة اثنتين ، هل الحادثتان M و N مستقلتان ؟

2) إذا كان عدد الكرا ت المسحوبة ثلاثة ، هل الحادثتان M و N مستقلتان ؟

الحل

1) نرمز للكرة البيضاء بالرمز B و للكرة الحمراء بالرمز R

مجموعة المخارج الممكنة هي :

$$E=\{(B,B);(B,R);(R,B);(R,R)\}$$

نفرض أن القانون المعرف على E متساوي الاحتمال ، لدينا عندئذ

$p(M)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $p(N)=\frac{3}{4}$ و منه $p(M)\times p(N)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

و لدينا $M\cap N=\{(B,R);(R,B)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

و منه الحادثتان M و N غير مستقلتين

2) مجموعة النتائج هي :

$$E=\{(B,B,B);(B,B,R);(B,R,B);(R,B,B);(B,R,R);(R,B,R);(R,R,B);(R,R,R)\}$$

$p(M)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $p(N)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و منه $p(M)\times p(N)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

و لدينا $M\cap N=\{(B,B,R);(B,R,B);(R,B,B)\}$ إذن $p(M\cap N)=\frac{3}{8}$

و منه الحادثتان M و N مستقلتان

الأعمال الموجهة

في امتحان شفهي لدخول أحد المعاهد . وضع 20 سؤال داخل صندوق في أوراق مطوية متماثلة . 6 في مادة العلوم الطبيعية، 5 في مادة الرياضيات، 4 في مادة الفيزياء، 3 في مادة الأدب العربي و سؤالان في مادة الاجتماعيات.

I) يطلب من المترشح الأول أن يسحب ورقة واحدة يجيب عما بداخلها ثم يتركها خارج الصندوق و يسحب ورقة ثانية يجيب عن ما بداخلها ثم يسحب ورقة ثالثة دون أن يعيد الثانية إلى الصندوق .

1- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين حول الرياضيات و سؤال في مادة الفيزياء بهذا الترتيب ؟

2- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين حول الرياضيات و سؤال في مادة الفيزياء ؟

3- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في سؤال حول الأدب العربي على الأقل ؟

4- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في مواد علمية ؟

II) المترشح الثاني طلب منه إتباع نفس طريقة المترشح الأول في سحب الأسئلة لكن سمح له بإعادة الورقة بعد طيّها الى الصندوق كلما أجاب عما بداخلها . ما إحتمال أن يمتحن المترشح :

1- في مادة الاجتماعيات فقط ؟

2- في 3 أسئلة من نفس المادة ؟

3- في نفس السؤال مرتين مختلفتين ؟

4- في نفس السؤال ثلاث مرات ؟

III) يطلب من المترشح الثالث الذي يعرف الإجابة عن أسئلة الرياضيات و الفيزياء و الأدب العربي فقط سحب سؤال واحد فإذا أجاب عنه إجابة صحيحة يسمح له بسحب السؤال الثاني و إذا أجاب عن السؤال الثالث يسمح له بسحب السؤال الثالث و الأخير.

1- ما إحتمال أن يمتحن المترشح في 3 أسئلة ؟

2- ما إحتمال أن يحصل هذا المترشح على علامة 10 بناءا على سلم التنقيط السابق ؟

3-إذا علمت أن المترشح قد أمتحن في ثلاثة أسئلة علمية . ما إحتمال حصوله على علامة 8 ؟

4- نعتبر X العلامة النهائية التي يتحصل عليها هذا المترشح .

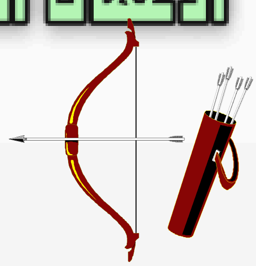
أ) عرف قانون الاحتمال على X .

ب) أحسب أمله الرياضياتي .

ج) هل التنقيط في صالح المترشح ؟

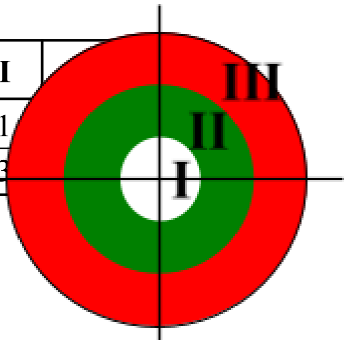
الأعمال الموجهة

(B) ، (A) راميا قوس ، كل منهما يسدّد أسهمه نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (III – II – I) .
الراميان ماهران بحيث يصيبان الهدف في كل رمية
لكنهما يتفاوتان في دقّة التسديد .
إذ أن احتمالات إصابة كل منطقة من قبل كل رامي هي :



x_i	I	II	III
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$

y_i	I
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$



1) الرامي (A) يسدد ثلاثة أسهم متتابعة :

أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

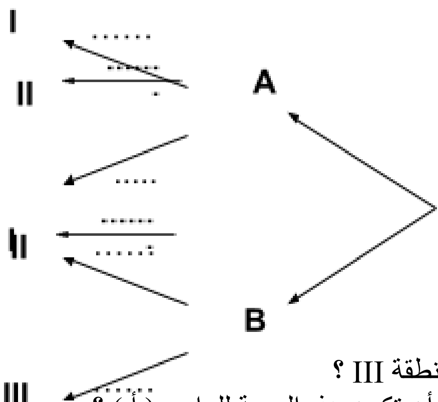
ب- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III بهذا الترتيب ؟

جـ- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟

2) في مسابقة بينهما . نرمي قطعة نقود عادية لتحديد الذي يبدأ أولا في التسديد . إذا ظهر الوجه يبدأ الرامي A و إلا يبدأ الرامي B .

أ) نرمز بـ F لوجه قطعة النقود و بـ P للظهر

- أكمل الشجرة (العنكبوتية)



ب) في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III ؟

ج) علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة III . ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (أ) ؟

إصابة المناطق أعد في ال -

3) قبل انطلاق المسابقة ، انضم رام بارع C احتمالات إصابته للمناطق I – II – III على الترتيب هي $\frac{7}{10}$ ، $\frac{3}{10}$ ، 0

تقرر على إثر ذلك إعادة ترتيب المتسابقين بإجراء قرعة عادلة بينهم .

- أعد في الظروف الحالية الإجابة عن الأسئلة الثلاثة من الفرع (2) من هذا التمرين

موضوع محلول

2) هذه اللعبة تقتضي أن يدفع كل لاعب 10 دنانير ثم يختار رقما واحد
- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أزرقا** يربح اللاعب DA 100
- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **بنيا** يربح اللاعب DA 50
- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أخضرا** يربح اللاعب DA 10
- إذا استقر السهم عند الرقم المختار وكان لونه **أصفرا** لا يربح اللاعب أي شيء .

نعتبر X الربح الحقيقي الذي يجنيه كل لاعب يجرب حظه
- عرّف قانون الاحتمال للربح الحقيقي X و احسب أمله الرياضياتي . هل هذه اللعبة عادلة ؟

حل مختصر

1) لدينا $E=\{15;14;13;12;11;10;9;8;7;6;5;4;3;2;1\}$

عدد الأرقام المضاعفة لـ 5 و الموجودة على العجلة هو 3

و منه $p(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

B هي الحادثة العكسية للحادثة A

ومنه $p(B)=1-p(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$p(C)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

(2

x_i	10 -	0	40 +	90 +
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$E(X)=(-10)\times\frac{7}{15}+0\times\frac{4}{15}+40\times\frac{2}{15}+90\times\frac{2}{15}=\frac{190}{15}=\frac{38}{3}$$

و بالتالي اللعبة غير عادلة .

تعاليق

☜ يفضل تصنيف عناصر E حسب ما تمليه الحادثة " حسب الأرقام أو حسب الألوان " و ذلك باستعمال شجرة عادية

أرقام مضاعفة 3 لـ 5

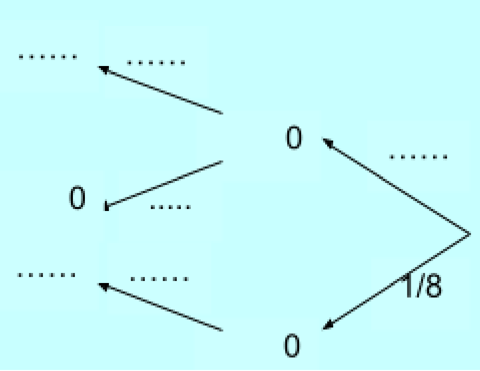
رقما غير مضاعف 12 لـ 5

p مباشرة ولكن يفضل الاستفادة مما سبق

☜ ينبغي أولى معرفة الربح الحقيقي الممكن تحقيقه (قيم X)

☜ تكون اللعبة عادلة إذا كان الأمل الرياضياتي معدوما

موضوع مع إرشادات



ب) ليكن X عدد المعادلات التي تقبل حلولا في ℝ .
- عرف قانون الاحتمال لـ X

x_i	6-10	5-2	2-	3	0 0		40	1	2	802		1700
P_i	0,40,	0,3	0,2	0	,2	0	,16	,10	,2	0,01,1		0,305

ج) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين .
2- إذا كان يريد التلميذ حل ثلاث معادلات فقط (الأولى ، الثانية و الثالثة)
أ) ما إحتمال أن يكون مميز المعادلة الثالثة سالبا؟
ب) ما إحتمال أن تكون المعادلات الثلاثة لا تقبل حلولا حقيقية ؟

إرشادات

1) أ) تملأ الشجرة بالاحتمالات المناسبة للتفريعات و باعتماد المعلومة و المعلومة العكسية ثم الشرطين بعد ذلك .

ب) المعادلات التي تقبل حلولا هي التي مميزها موجب أو معدوم.

2) تضاف للشجرة السابقة تفريعات للمعادلة الثالثة

- تحدد جميع المسارات المؤدية للحادثة

- حساب جداء الأعداد الموجود على كل مسار مؤدي لها

- إحتمال حادثة ما هو مجموع الأعداد الناتجة عن كل مسار

تمارين تطبيقية

1- الإحتمال و قانون الاحتمال

1 في كل حالة مما يأتي أكمل قانون الإحتمال و احسب الأمل الرياضياتي و التباين دون استعمال لحاسبة

2 نرمي حجر نرد ، احدهما مكعب متوزن أوجهه تحمل الأرقام من 1 الى 6 و الآخر رباعي وجوه متوازن أوجهه تحمل الارقام من 1 الى 4
عرّف قانون الإحتمال لرقم آحاد جداء الرقمين الناتجين و أحسب امله الرياضياتي

3 يضم كيس 10 قريصات مرقمة من 0 الى 9 .
3 منها بيضاء و الباقي سوداء
نسحب قريصة واحدة . ما احتمال الحصول على
1) قريصة تحمل رقما فرديا ؟
2) قريصة بيضاء ؟
3) نسحب الآن قريصتان على التوالي دون إرجاع .
أ)ما احتمال الحصول على رقمين فرديين ؟
ب) ما احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون ؟
ج) نعتبر X عدد القريصات البيضاء المسحوبة ، عرّف قانون احتمال لـ X و احسب أمله الرياضي

4 نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتابعة
1) حدد مجموعة المخارج .
2) كوّن الشجرة المناسبة
3) ما احتمال أن يظهر في الرمية الثالثة وجه ؟

5 نرمي حجر نرد عادية مرتين متتابعتين . ما احتمال الحصول على :
1) رقمي فرديين ؟
2) عددين مجموعهما فردي ؟
3) عددين جداؤهما زوجي ؟
4) عرّف قانون احتمال لعدد الأرقام الفردية الظاهرة في الرميتين و احسب التباين

6 نرمي قطعة نقود متوازنة 6 مرات متتابعة .
ما احتمال أن يكون عدد مرات ظهور الوجه :
1) يساوي عدد مرات ظهور الظهر ؟
2) أكبر من عدد مرات ظهور الظهر ؟
3) مضاعف لعدد مرات ظهور الظهر ؟

4) ما ذا نقول عن قانوني احتمال لكل من عدد مرات ظهور الوجه و عدد مرات ظهور الظهر؟

7 نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام ملونة أخضر ، أحمر و أصفر و نطلب منه تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل . ما عدد الكيفيات الممكنة للتلوين ؟

8 دفع لاعب x DA و أخذ حجري نرد عاديين و رماهما .إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح 20DA و إلا لا يربح أي شيئ . كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى تكون اللعبة عادلة ؟

9 يضم صندوق A كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء و يضم الصندوق B كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء .

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A .
ما احتمال أن تكون بيضاء ؟

2) نعيدها الكرة المسحوبة إلى الصندوق B .

a) ما احتمال أن يكون عدد الكرات البيضاء يساوي عدد الكرات السوداء ؟

b) ما احتمال أن يكون عدد الكرات البيضاء ضعف عدد الكرات السوداء ؟

1 يضم كيس 49 مرقمة من 1 الى 49 ، منها 6 كريات حمراء و الباقي بيضاء . نسحب على التوالي دون ارجاع 6 كريات

1) ما عدد الطرق الكلية ؟

2) ما احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء ؟

3) ما احتمال الحصول على 6 كريات حمراء ؟

4) ما احتمال الحصول على 5 كريات حمراء ؟

5) ما احتمال الحصول على 4 كريات حمراء ؟

1 يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة . يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا (الترتيب مهم)

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2) ماهو احتمال تشكيل لجنة بحيث :

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟

1 يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 الى 20 لا نفرق بينها عند اللمس .

1- نسحب كرة من الكيس ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرة تحمل اعددا مضاعفا للعدد 4 ؟

ب- كرة تحمل اعددا ليس من مضاعفات 5 ؟

2- نسحب في هذه المرة كرتين على التوالي دون ارجاع ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب- كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 و الثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3- نسحب الآن 3 كرات على التوالي دون ارجاع ما هو إحتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات تحمل أعددا مضاعفة للعدد 4 ؟

ب- ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي ؟

1 نرمي قطعة نقود عادية ثلاث مرات متتابعة و نهتم بعدد الأوجه في الرميات الثلاثاء

1) عرف قانون الاحتمال و احسب أمله الرياضي و تباينه

2) أعد الإجابة عن السؤال من أجل 4 رميات متتابعة

1 يشارك فريد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها 0,65 .قرر فريد المحاولة 3 مرات متتابعة (نعتبر أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض) . نرمز بـ X لعدد مرات الفوز خلال ثلاث محاولات.

1) ما هو احتمال الحادثتين :

A " دوما يفشل في المحاولات الثلاثة "

B " يفوز مرة واحدة على الأقل في المحاولان ت الثلاثة "

2) عرف قانون الاحتمال للعدد X

3) أوجد الأمل الرياضياتي و التباين لـ X

1 يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و ثلاث قريصات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن X عدد الكرات البيضاء ضمن السحبة . وليكن Y رقم القريصة المسحوبة

1) عرف قانوني الإحتمال لكل من X و Y

2) أحسب الامل الرياضياتي لكل من X و Y

3) إذا اعتبرنا الامر يتعلق بلعبتين . فأيهما مربحة بالنسبة للاعب ؟

1 نعتبر قانون الاحتمال X المعرف كمايلي :

α	1-	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X=2)$ و $P(X \geq \frac{5}{2})$ و
$P(X$ [illegible] $1)$

1 يحوي كيس 3 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X العدد الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .

1) حدد مجموعة النتائج الممكنة .

2) حدد مجموعة القيم الممكنة للعدد X .

3) عرف قانون الإحتمال لـ X.

4) أحسب الامل الرياضياتي .

5) أحسب التباين .

6) أوجد $P(X \geq 25)$.

تمارين

1 يحوي صندوق 5 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2 ، 3 ، 3 و 4 ، و خمس قريصات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 أيضا . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق و نعتبر العدد الحقيقيX الذي يساوي (1+) في حالة سحب قريصة بيضاء و صفر في حالة سحب قريصة سوداء ، و نعتبر أيضا العددY الذي يساوي الرقم الموجود على القريصة المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال لكل من X و Y.
2) أحسب الأمل الرياضياتي لكل عدد.
3) في حالة كونهما لعبتين . أيهما مربحة للاعب ؟

1 نرمي زهرة نرد رمية واحدة و ليكن X العلامة التي تحدد كمايلي :

- العلامة (10-) إذا ظهر الرقم 1
- العلامة (10) إذا ظهرت الأرقام 6
- العلامة (0) في الحالات الأخرى

1) حدد مجموعة المخارج ثم مجموعة القيم
2) إذا كانت زهرة النرد عادية عرّف قانون الاحتمال للعدد الحقيقي X
3) نفرض أن زهرة النرد غير متوازنة بحيث احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12 .
- عرّف قانون الاحتمال للعدد X في هذه الحالة

2- الإحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة

2 A و B حادثتين من E حيث

$p(A)=0,4$ ، $p_{\bar{A}}(B)=0,8$ و $p_A(B)=0,2.$

أنشئ الشجرة المثقلة ثم أحسب $p(A\cap B)$ و $p(B)$

2 A و B حادثتين من E حيث

$p(A)=0,4$ ، $p(\bar{A}\cap B)=0,3$

و $p(A\cap B)=0,2.$

- أحسب $p_A(B)$ و $p_{\bar{A}}(B)$

2 A ، B ، C و D حوادث من E حيث

$p(A)=0,3$ ، $p(B)=0,5$ و $p_A(D)=0,05.$

$p_B(D)=0,1$ و $p_C(D)=0,2.$

أنشئ الشجرة المثقلة ثم أحسب $p(D)$

2 يتكون فريق كرة سلة من 6 لاعبين ممتازين في تسديد الرميات الحرة . نسبة نجاح إثنين منهم في التسديد 80% ، و ثلاثة نسبة نجاحهم في التسديد 90% و آخرهم منصور نسبة نجاح التسديد عنده 95 % .
حضرنا مقابلة لهذا الفريد حيث كل لاعب من هؤلاء كانت له نفس فرص التسديد . أخذنا أحد اللاعبين عشوائيا
نضع A الحادثة " منصور ضيع التسديدة "
R " رمية ناجحة "

1) أحسب الاحتمالات التالية $p(A)$ ، $p_A(R)$ و $p(A\cap R)$

2) أحسب $p(R)$ (يمكنك استعمال الشجرة)

2 لاعب تنس الميدان (كرة المضرب) ينجح في الإرسال الأول بنسبة 75% و في الإرسال الثاني بنسبة 90% .
ما احتمال ارتكابه خطأ مضاعف (إرسال خاطئ بالكرة الثانية).

2 يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 .
نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .
1) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .
2) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10 .

2 في مدينة ما ، 55 % من السكان مدخنون و 45 % منهم مدمنون على شرب القهوة و 30 % مدخنون و مدمنون على شرب القهمو . نأخذ عشوائيا رجلا واحدا من هذه المدينة :
1) إذا كان هذا الرجل مدخنا ، ما إحتمال أن يكون مدمنا على شرب القهوة أيضا ؟
2) إذا كان هذا الرجل مدمنا على شرب القهوة ،ماإحتمال أن يكون مدخنا أيضا ؟
3) ما إحتمال أن يكون مدخنا أو مدمنا على شرب القهوة ؟

2 يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 1/3 . نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة . أحسب ل إحتمال الحصول على وجه . (يمكنك تشكيل الشجرة).

2 يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين . نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .

نرمز بـ B_1 للحادثة " الكرة المسحوبة في المرّة الأولى بيضاء "

و بـ B_2 للحادثة "الكرة المسحوبة في المرّة الثانية بيضاء "

- أحسب الإحتمال $p(B_1)$ ثم مباشرة $p(B_2/B_1)$

و استنتج $p(B_2\cap B_1)$

2 A ،B كيسان . يضم A كرة حمراء و كرة خضراء.
الكيس B يضم 3 كرات حمراء و كرة واحدة خضراء .
نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم نسحب كرة من الكيس B .
1) شكل الشجرة المناسبة
2) ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .
3) ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرة الثانية سوداء .

3 يضم صندوق كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء.
نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها الى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نسحب كرة ثانية .
1) شكّل الشجرة المناسبة
2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A "يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "
B "يوجد 5 كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة"

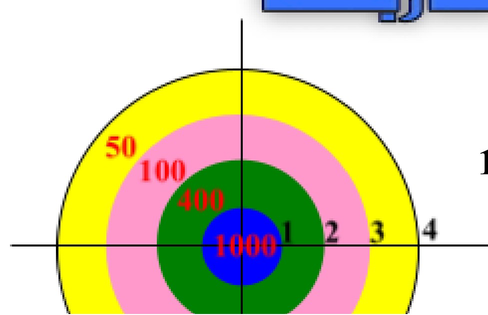
يتكون قسم من 25 % من البنات و 75 % من الأولاد .
نفترض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .
1- ما احتمال أن يكون :
أ- بنتا ؟ ب- ولدا ؟ جـ- جيدا ؟
2- ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصرا جيدا ؟

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .
- نسحب عشوائيا على التوالي دون ارجاع .
1- أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "
B " الكرتان من نفس اللون "
C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "
- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟
2- ما إحتمال الحوادث التالية :
D " الكرتان من لونين مختلفين "
E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "
3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال أن يكون رقماها فرديين ؟

تمارين للتعمق

يضم كيس 7 قريصات . واحدة حمراء ، إثنتان صفراوتان و أربع خضراء .
تقتضي اللعبة سحب قريصة واحدة من الصندوق
- إذا كانت حمراء اللاعب يربح 10DA
- إذا كانت صفراء يخسر اللاعب 5DA
- إذا كانت خضراء يعيد اللاعب سحب قريصة أخرى دون إرجاع الاولى الى الكيس ، فإذا كانت الثانية حمراء يربح اللاعب 8DA و إلا يخسر 4DA
نهتم بالربح الجبري (ربح أم خسارة) في نهاية اللعبة . لتكن E مجموعة الأرباح الممكنة
1) أ) أنشئ الشجرة المثقلة المفصلة
ب) أحسب احتمال الحادثة G " اللاعب رابح "
ج) عرّف قانون احتمال على المجموعة E و أحسب الامل الرياضياتي
2) قدّر الربح الجبري الذي يقترح على اللاعب حينما تكون سحبته الثانية قريصة حمراء و ذلك حتى تكون اللاعبة عادلة.

هدف و مساحة :
رامي قوس بارع دوما يصيب الهدف لكن إحتمال إصابة أية منطقة من المناطق الأربعة هو نسبة مساحتها الى مساحة الهدف ككل



ليكن X العلامة النهائية المترتبة عن تسديد سهم واحد
1) حدد القيم الممكنة لـ X.
2) عرّف قانون الإحتمال لـ X.
3) أحسب الأمل الرياضياتي و الإنجراف المعياري.

يحتوي كيس A على 3 كريات تحمل الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 1- و كرية واحدة تحمل الرقم0 .
يحتوي كيس B على 3 كريات تحمل الرقم 1- و كريتان تحملان الرقم 0 و كرية واحدة تحمل الرقم1 .
نختار كيسا من بين الكيسين ثم نسحب كريتان منه بالتتابع و بدون إرجاع.
نعتبر X مجموع الرقمين المسجلين على الكريتين المسحوبتين.
1.حدّد قانون احتمال X.

في عينة من 50 شخصا نلاحظ الرجال الملتحين (لهم لحية) أو أعينهم زرقاء .
عددنا 20 شخصا لهم لحى ، 15 شخص لهم أعين زرقاء منهم 8 ملتحون .
نتحاور مع أحدهم عشوائيا
نضع R " رجل له لحية " ، B " رجل له عينان زرقاوتان "
أحسب الاحتمالات التالية:

$$p(R) \text{ ، } p(B) \text{ ، } p(R \cap B) \text{ و } p_R(C)$$

مسـائـل

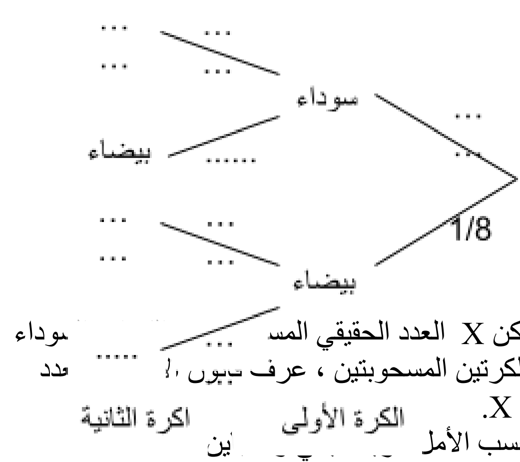
(Y) ، (X) راميا قوس ، كل منهما يسدد سهما نحو هدف. احتمال كل منهما في إصابة الهدف 0,85 ، 0,90 على الترتيب .
1) إذا علمت أن :
- إحتمالات إصابة الرامي (X) المناطق I – II – III على الترتيب هو $\frac{7}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$.
- إحتمالات إصابة الرامي (Y) المناطق I – II – III متساوية .
1- الرامي (X) يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :
أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟
ب- ما احتمال إصابة I – II – III بهذا الترتيب ؟
جـ- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟
2- نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي (X) ضعف احتمال اختيار الرامي (Y) .
أ- في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الر مية المنطقة III ؟
ب- علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة III

ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (X) ؟

3 سمير و منير صديقان حميمان . يدرسان في نفس القسم النهائي. مستوي سمير الدراسي غير كاف قال عنه الأستاذ أن إحتمال أن ينجح في البكاوريا هو 0.5 .
إذا كان إحتمال أن ينجح منير هو 0.7 فأحسب :
1- - إحتمال أن يعيشا معا هذه المدة .
2- - إحتمال ان يعيش عمر وحده هذه المدة .
3- - إحتمال أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة .
4- - إحتمال ان يعيش يوسف وحده هذه المدة .
5- إحتمال ان لا يعيشا معا هذه المدة .
6- - إحتمال أن لا يعيشا هذه المدة .
7- - أحسب مجموع الأحتمالات التي حصلت عليها . ماذا تستنتج ؟

3 نسحب كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق يضم كرات بيضاء و سوداء .
إذا علمت أن احتمال أن تكون الكرة الأولى **بيضاء** هو $\frac{1}{8}$ ،
نفرض صحة الشرطين التاليين :
- احتمال أن تكون كرة ما **بيضاء** بشرط أن تكون الكرة المسحوبة سابقا **بيضاء** هو $\frac{1}{20}$
- احتمال أن تكون كرة ما **بيضاء** بشرط أن تكون الكرة المسحوبة سابقا **سوداء** هو $\frac{1}{20}$

1- إذا سحبنا كرتين على التوالي دون إرجاع .
أ- أكمل الشجرة (العنكبوتية) التالية



ب) ليكن X العدد الحقيقي الم... ضمن الكرتين المسحوبتين ، عرف ... الحقيقي X.
ج) أحسب الأمل ... ين

2- إذا سحبنا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع (الأولى ، الثانية و الثالثة)
أ) ما احتمال أن تكون الكرة الثالثة سوداء؟
ب) ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة سوداء ؟

4 **الزمر الدموية :**
الجدول التالي يبين توزيع مختلف الزمر الدموية على عينة من الناس.

الزمرة	O	A	B	AB
+ Rh	39%	38%	6%	2%
- Rh	6%	6%	2%	1%

1) أكمل الشجرة التالية:

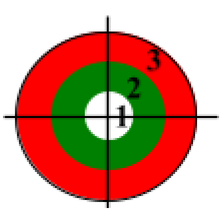
تمارين

2) أخذ شخص عشوائيا من هذه العينة ، ما احتمال
أ) أن تكون فصيلته موجبة ؟
ب) أن تكون فصيلته سالبة علما أن زمرته O ؟

4 ينتج مصنع آلات حاسبة عادية وآلات حاسبة علمية إلا أن عدد الآلات العادية التي ينتجها ضعف عدد الآلات العلمية . احتمال وجود خلل في حاسبة عادية هو 0,05 أما في حاسبة علمية فهو 0,03
أخذ المراقب حاسبة واحدة عشوائيا . أحسب احتمال أن تكون :
1) الحاسبة عادية .
2) الحاسبة علمية
3) الحاسبة فيها خلل ؟
4) الحاسبة عادية علما أن فيها خلل .

4 (A)،(B) صندوقان . الصندوق (A) يحوي 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء أما الصندوق (B) فيحوي 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة .
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (B) و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق (B) الذي نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها أيضا .
1- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟
2- ما إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟
3- نعرف لعبة كمايلي تمنح لكل كرة بيضاء العلامة (α +) و لكل كرة سوداء العلامة (α -) .
أ- عرف قانون الإحتمال للعلامة النهائية X ثم أحسب الأمل الرياضياتي.
ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون الأمل الرياضياتي مساو لـ1 .
4- نضيف الى الصندوق (n-3) ، B) كرة سوداء و نعيد عملية السحب المبينة أعلاه .
أ- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟
ب- كم من كرة سوداء ينبغي إضافتها الى الصندوق (B) حتى يكون إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

4 يسدد رامي ثلاث رميات متتالية نحو هدف (أنظر الى الشكل) .
إذا علمت أن إحتمال إصابة هذا الرامي للهدف هو 0,7 .
1- أحسب إحتمال أن يصيب



الرامي الهدف ثلاث مرات ؟

2- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرتين فقط ؟

3- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

4- إذا علمت أن الهدف مقسم الى ثلاث مناطق (الشكل) بحيث إحتمال أن يصيب هذا الرامي المنطقة (1) هو 0,1 و احتمال أن يصيب المنطقة (2) هو 0,2 و احتمال أن يصيب المنطقة (3) هو 0,4 فأحسب احتمال .

أ- أن يصيب المنطقة (1) ثلاث مرات ؟

ب- أن تصيب كل رمية منطقة واحدة فقط ؟

5- X النقطة الممنوحة للرامي ، بحيث إذا أصاب المنطقة (1) له العلامة 10 و المنطقة (2) له العلامة 7 و المنطقة (3) له العلامة 5 و إذا أخطأ الهدف كلية كانت العلامة صفر.

- عرف قانون الإحتمال لـX ثم أحسب الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري .

يضم صندوق خمس قريصات تحمل الأرقام التالية (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، x) حيث x عدد طبيعي ، و ليكن p(n) احتمال سحب القريصة ذات الرقم n . إذا علمت أن الاعداد p(1) , p(2) , p (3) , p(4) , p(x) بهذا الترتيب تشكل حدود من متتالية حسابية أساسها 1/15 .

1- أوجد الأعداد p(1) , p(2) , p (3) , p(4) , p(x)

2- ليكن T االعدد الحقيقي المساوي للرقم الذي تحمله القريصة المسحوبة . عين قيمة x حتى يكون الامل الرياضياتي يساوي 4 . و أحسب التباين عندئذ .

يضم صندوق 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9 يطلب من الاعب أن يسحب 3 كرات على التوالي دون إرجاع . و لتكن (x , y , z) هي النتائج مرتبة حسب رتبة سحبها.

1- أحسب احتمال الحصول على النمط التالي :

* النمط الأول ($x = y = z$) و ليكن p(1).
* النمط الثاني ($x = y \neq z$) و ليكن p(2)
* النمط الثالث ($x = z \neq y$) و ليكن p(3).
* النمط الرابع ($y = z \neq x$) و ليكن p(4).
* النمط الخامس (x , y , z مختلفة مثنى مثنى) و ليكن p(5).

2- أحسب p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) .

- ماذا تستنتج ؟

3- إذا علمت أن اللاعب يربح 11 DA إذا سحب النمط الثاني أو الثالث أو الرابع و يخسر a DA إذا سحب النمط الأول أو الخامس .

أ- عرف قانون الاحتمال للربح المترتب عن كل عملية سحب .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي .

جـ- من أجل أي قيمة للعدد a يكون اللعب متعادل (لا خسارة و لا ربح) ؟

يريد أحمد أن يتصل بسعيد هاتفيا لكنه - لسوء حظه - نسي الرقم تماما ، فقرر عبثا القيام ببعض المحاولات و ذلك بتشكيل أعداد من 6 أرقام . إذا كان P هو إحتمال أن يصيب مبتغاه في المحاولة الأولى.

تعطى النتائج على الشكل ($n \times 10^{-6}$)

1- أحسب P .

2- تذكر أحمد أمرا هاما ، الرقم الصحيح يضم رقمين زوجيين متمايزين فقط . أحسب أنت P إن استطعت .

3- بعد قليل تذكر أحمد شيئا آخر . من بين الأرقام الفردية يوجد رقمان فقط من مضاعفات 3."إن كنت ذكيا" أحسب P.

4- و ها هو أحمد بنفسه يؤكد لك أن الرقمين الزوجيين مجموعهما يساوي 10 . فهل بإمكانك الآن حساب P ؟

5- سأل أحمد أخاه علي . هل تعرف رقم هاتف سعيد ؟ قال علي : لا ، لكني أعرف أنه يضم أربعة أرقام فردية منها إثنان متساويان و متتابعان . ساعدهما أنت بحساب P.

6- و يصرخ أحمد لقد تذكرت . إن أحد الرقمين الزوجيين هو 8 و ترتيبه الاول و الرقم الأخير هو 7 . هل تتكرم أنت بحساب P ؟

7- و بعد عدة محاولات إستطاع أحمد الإتصال بسعيد الذي ضحك كثيرا لسماعه القصة و قال له يا أحمد تذكر دائما أن مجموع أرقام هاتفي يساوي 30 و هو مكون من أربعة أرقام متساوية مثنى مثنى و متتابعة فإلى اللقاء .

- إن فهمت القصة فما رقم هاتف سعيد ؟

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم زوجيا سمح له برمية أخرى و هكذا و تنتهي اللعبة بعد 10 رميات إجباريا أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا .

1- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى؟

2- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية؟

3- إذا أراد اللاعب أن يكون إحتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات الذي لا ينبغي تجاوزه ؟

4- تقتضي هذه اللعبة أن يدفع اللاعب 1DA مقابل كل محاولة (و لا يدفع مادام يحصل على رقم زوجي) على أن يربح 5DA إذا حصل على رقم زوجي .

أ- ما إحتمال أن يربح اللاعب 20 DA ؟

ب- ما إحتمال أن لا يخسر و لا يربح ؟

5- تعدل اللعبة بالكيفية التالية : صاحب الرقم الزوجي يربح 5 DA و صاحب الرقم الفردي يخسر 2 DA و على كل لاعب أن يحاول 3 مرات فقط إلزاميا .

ليكن X الربح المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال لـ X ثم أحسب امله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

تمارين

يضم صندوق 5 قريصات،4 سوداء و واحدة بيضاء.

1) نسحب من الصندوق 6 قريصات على التوالي مع الإرجاع .ليكن X عدد القريصة البيضاء المسحوبة. عرّف قانون الاحتمال لـ X و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

2) نقوم الآن بالسحب n مرّة (بنفس الكيفية السابقة) .

ليكن X_n عدد القريصة البيضاء المسحوبة.

- عرّف قانون الاحتمال للعدد X_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

3) ليكن Y_n العدد الحقيقي $\frac{X_n}{n}$ الذي يمثّل تواترات ظهور القريصة البيضاء

- عرّف قانون الاحتمال للعدد Y_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

4 يحتوي كيس على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس واحدة صفراء، 7 حمراء و زرقاوين.
في لعبة تقتضي أولا سحب كرية من الصندوق: إذا كانت الكرية صفراء فإن اللعبة تتوقف، إذا كانت الكرية المسحوبة غير صفراء ،نسحب كرية ثانية دون إرجاع الكرية المسحوبة الأولى إلى الكيس.

1.أ- ما هو احتمال سحب كرية صفراء في السحب الأول؟
ب- ما هو احتمال سحب كرية حمراء في السحب الأول؟
ج- ما هو احتمال أن يسحب اللاعب كرية صفراء في السحب الثاني علما أنه سحب كرية حمراء في السحب الأول؟

2.في هذا السؤال يمكن استعمال شجرة الاحتمالات
أ- ما هو احتمال سحب كرية زرقاء في السحب الأول و كرية حمراء في السحب الثاني؟
ب- بين أن احتمال سحب كرية حمراء في السحب الثاني هو $\frac{28}{45}$.

3.لاعب يربح إذا سحب كرية حمراء في السحب الثاني .4 أشخاص يشاركون في هذه اللعبة.
أ- احسب احتمال ألاّ يربح أحد من الأشخاص الأربعة.
ب- احسب احتمال أن يربح شخص على الأقل من الأشخاص الأربعة.

اختيار من متعدد

5 في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث
p(B) = 0,4 ، P(A) = 0,7 و $p(A \cup B) = 0,2$

1) قيمة الاحتمال $p(A \cup B)$ هي :
a) 0,9 b)1,1 c)0,6

2) قيمة الاحتمال $p(\overline{A} \cap B)$ هي :
a) 0,8 b)0,2 c)0,1

قيمة الاحتمال $p(\overline{A} \cap \overline{B})$ هي :
a) 0,8 b)0,1 c)0,3

قيمة الاحتمال $p(\overline{A} \cup \overline{B})$ هي :
a) 0,8 b)0,9 c)0,1

5 جواب واحد على الأقل صحيح

تجربة تتبع قانون برنولي حيث احتمال النجاح هو P و احتمال الإخفاق هو q
a) p < 1
b) p = q
c) p > q
d) p < 0,5
e) p = 1 - q

5 جواب واحد على الأقل صحيح

في مطعم 60 % من المأكولات سمك (S) 20 % من المثلجات (G) و 30 % ليست أسماك و لا مثلجات .

a) $p(\overline{S}) = 0,40$

b) $p(S \cup G) = 0,8$

c) $p(S \cap G) = 0,1$

d) $p(S \cap \overline{G}) = 0,5$

e) $\overline{S} \cap G$; $S \cap \overline{G}$ غير متلائمتين

صحيح أم خاطئ

5 60 % من مجتمع مطعمة (V) ضد مرض ما ، نلاحظ أن 5 % منهم حساسية A ، من بين الأشخاص غير المطعمين ، 10 % عرضة للحساسية A .
نختار شخصا عشوائيا مطعما ، احتمال أن يكون عرضة للحساسية هو :

a) $p_A(V)$

b) $p(V)$

c) $p_V(A)$

d) 0,10
e) 0,05
f) 0,6

5 A ، B حادثتان مستقلتان

a) $p(A \cap B) = P(A) \times p(B)$

b) $p_A(B) = p(A)$

c) $p_B(A) = p(A)$

d) $p(A \cup B) = P(A) \times p(B)$

e) $P(B) = 1 - p(A)$

5 الجدول التالي يعرّف قانون احتمال للعبة ما :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,25	0,1	0,15	0,2	0,2

1- يضرب الأمل الرياضياتي في العدد 100 إذا حوّلت الإحتمالات الى نسب مئوية .
2- يزداد الأمل بـ 1 إذا أضيف لكل القيم العدد 1 .
3- ينقص الأمل بنسبة 20% إذا نقصت كل القيم بنفس النسبة .
4- إذا استبدلت القيمة 6 بالقيمة 7 يزداد الامل بمقدار 0,2