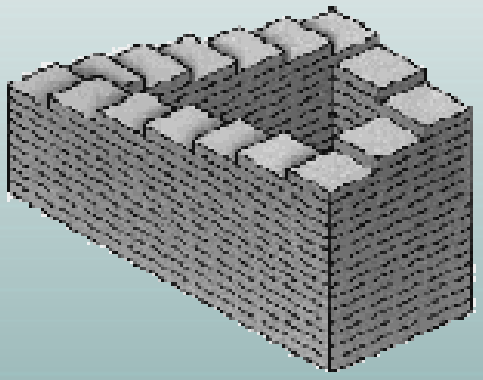
الكفاءات المستهدفه

- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية ، التلاقي ، انتماء أربع نقط إلى نفس مستو.
- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس .
- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .

أنظر جيدا و تخيل نفسك أنك تصعد على هذا السلم ...
هل أنت فعلا تصعد ! ؟



نشاط أول

نشرح في هذه المرحلة طريقة غوص (GAUSS) لحل جملة معادلات خطية من خلال هذا المثال .

نعتبر الجملة (S) حيث

$$(S):\begin{cases} a-2b+2c-2d+e=1 & \dots\dots (L_1) \\ 2a-b+c-d-e=2 & \dots\dots (L_2) \\ a-b+2c-d+e=4 & \dots\dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى :

$$L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \quad ; \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1$$

نحصل على (S_1) :

$$(S_1):\begin{cases} a+2b+2c-2d+e=1 \\ 3b-3c+3d-3e=0 \\ b+d=3 \end{cases}$$

المرحلة الثانية :

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$ نغير ترتيب المجاهل و نقوم بالعملية

نحصل على (S_2) :

$$(S_2):\begin{cases} a+2c-2b-2d+e=1 \\ c-b-d+e=0 \\ b+d=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2c-2b-2d+e=1 \\ c-b-d+e=0 \\ b+d+0e=3 \\ 0d+0e=0 \\ 0e=0 \end{cases}$$

هذه الجملة مثلثية

المعادلتان الأخيرتان محققتان من أجل كل قيم d و e .

نختار d = k و e = k' مثلا فنحصل على حلول الجملة و هي الخماسيات (a ; b ; c ; d ; e) حيث

a = 1 + k ، b = 3 – k ، c = 3 – k' ، d = k ، e = k'

☜ **تطبيق** : باستعمال طريقة (GAUSS) حل الجملة التالية :

$$(S):\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ x-2y+3z=b \\ 4x-y+4z=c \end{cases}$$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة .

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

المربعات السحرية

مربع سحري ذو 16 خانة

- على كل سطر ، على كل عمود على كل قطر المجموع هو 34
- في القرن 20 وجدت المربعات السحرية تطبيقات عديدة متنوعة
في مجالات مختلفة (الإحصاء ، نظرية الإعلام ، استعمالات الزمن ...)
- نريد تعيين المربعات السحرية بتسع خانات بالأرقام من 1 إلى 9 . كل رقم يستعمل مرة واحدة و واحدة فقط .

a) مجموع الأرقام من 1 إلى 9 هو 45
لماذا يكون مجموع كل سطر وكل عمود وكل قطر هو 15 ؟

b) نفرض أننا وجدنا مربعا سحريا ذا 9 خانات ، ما هي المربعات السبعة الأخرى التي نحصل عليها بالدوران و التناظر ؟

c) لماذا تحوي الخانة المركزية (تقاطع القطرين) الرقم 5 في كل هذه المربعات ؟

d) عين كل هذه المربعات .

نشاط ث

عين كثيرات الحدود من الدرجة 4 الذي منحنياتها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، يشمل النقط $O(0;0)$ ، $A\left(1;-\frac{13}{2}\right)$ ، $B(2;-4)$ و تقبل في النقطتين A و B مماسا شعاع توجيهه $\vec{i}$

نشاط رابع

نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

حل الجملة ثم فسّر النتيجة هندسيا

المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

M(x; y ; z) نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R} \qquad \text{أو} \qquad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R}$$

وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية

نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

تقاطع المستقيمات و المستويات

(P) و ('P) مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ناظميان لهما على الترتيب . (D) و ('D) مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ على الترتيب

تقاطع مستقيمين : يمكن للمستقيمين (D) و ('D) أن يكونا

من مستويين مختلفين	من نقس المستوي		
	متوازيين		متقاطعين
	منطبقين	متوازيين و مختلفين	
التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال	التقاطع نقطة

تقاطع مستقيم و مستو: نلخص الوضعيات فيما يلي

(D) يقطع (P)	(D) يوازي (P)	
	(D) محتوا في (P)	(D) يوازي (P) " تقاطع خال "

تمرين محلول1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ـ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(+2 ; 2 ; - 3) و B(1 ; - 1 ; 0)

ـ هل النقطة C(1 ; 3 ; 2) تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل: شعاع توجيه لـ (AB) هو $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\\+3\end{pmatrix}$ و بالتالي $\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\\z=-3+3t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ هذه الجملة هي التمثيل الوسيطي

تنتمي C إلى (AB) إذا وفقط وجد t يحقق $\begin{cases}2-t=1\\2-3t=3\\-3+3t=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=-\frac{1}{3}\\t=\frac{5}{3}\end{cases}$ ومنه C لا تنتمي الى (AB)

تمرين محلول2:

نعتبر المستقيمات d_1 و d_2 و d_3 **ممثلة وسيطيا على الترتيب**

$$d_1:\begin{cases}x=-2+5t\\y=-1-t\\z=3+4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R} \qquad ، \qquad d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=4+3t'\\z=5-t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R} \qquad ، \qquad d_3:\begin{cases}x=-7+7t''\\y=-3t''\\z=2t''\end{cases}\quad t''\in\mathbb{R}$$

ـ أدرس تقاطع d_1 **و** d_2 **ثم** d_1 **و** d_3

الحل : $\vec{u_1}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_3}\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$ أشعة توجيه لـ d_1 و d_2 و d_3 على الترتيب

- نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي . و عليه نحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=1-t'\\-1-t=4+3t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=1\\t'=-2\end{cases}$

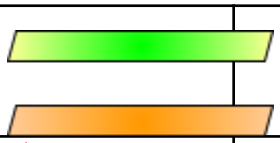
النقطة من d_1 من أجل t = 1 هي (3 ; -2 ; 7) و النقطة من d_2 من أجل t' = -2 هي (3 ; -2 ; 7)

و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في (3 ; -2 ; 7) .

- $\vec{u_1}$ و $\vec{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة

لحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=-7+7t''\\-1-t=-3t''\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=-1\\t''=0\end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل t = -1 هي (-7 ; 0 ; -1) و النقطة من d_2 من أجل t'' = 0 هي (-7 ; 0 ; 0) إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي .

متقاطعان	متوازيان	
	منطبقان	تقاطع خالي

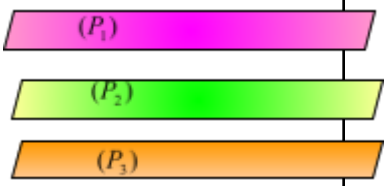
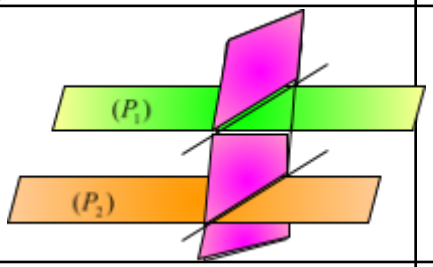
التقاطع مستقيم	التقاطع مستو	التقاطع خال
		

خاصية : مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

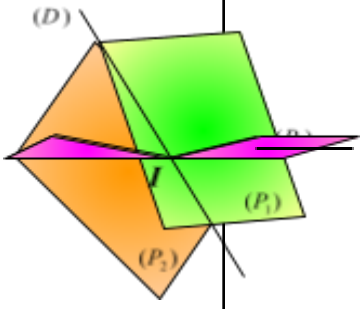
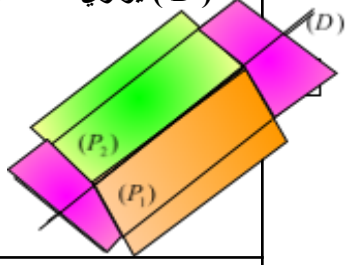
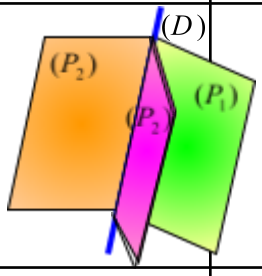
تقاطع ثلاث مستويات :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

1) الوضعيات النسبية (P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) متوازيان	(P_1) ، (P_3) متقاطعان
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

1) الوضعيات النسبية (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(D) لا يقطع (P_3)	(D) يوازي (P_3)	
	(D) يوازي (P_3) بتقاطع خال	(D) محتو في (P_3)
		
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$

تمرين محلول 4 :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب

$2x-y-2z-1=0$ ، $-x+4y+z-3=0$ ، $4x-2y-4z-5=0$

أدرس الوضعية النسبية لـ

b (P_1) ، (P_2) **(a)** (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

a) $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .
للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (z وسيط)

$\begin{cases}2x-y-2z-1=0\\-x+4y+z-3=0\end{cases}$ بعد الحساب نجد $t\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$

b) $\vec{n_3}=2\vec{n_1}$ أي $\vec{n_3}$ و $\vec{n_1}$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن A ، ($-3=-5-0+2\neq 0$) A(0 ; - 1 ; 0) ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تمرين محلول 5 :

نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) بالمعادلات **ديكارتية على الترتيب**
$4x+y+z+10=0$ ، $2x+y+3=0$ ، $2x-y+2z-1=0$

أدرس تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب
ليست مرتبطة خطيا مثنى مثنى و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثنى مثنى وفق مستقيم

تقاطع (P_1) ، (P_2) ، ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases}4x+y+z+10=0\\2x+y+3=0\end{cases}$

نضع z = t لنحصل على تمثيلا وسيطيا لـ (D) و هو $t\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}x=t\\y=-3-2t\\z=-7-2t\end{cases}$

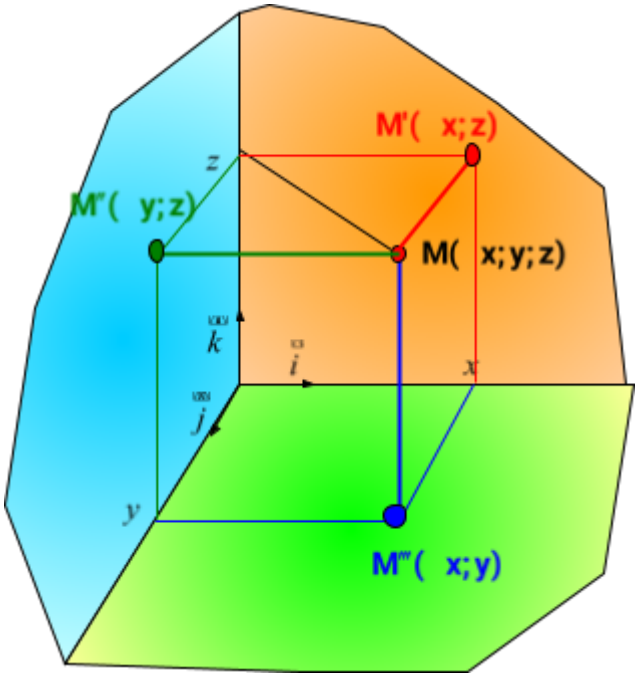
شعاع توجيه لـ (D) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ ($\vec{u}.\vec{n_3}=0$) إذن (D) يوازي (P_3) . A(0 ; -3 ; -7) نقطة من (D)
و بالتالي $(A\notin(P_3))$ $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

أعمال موجهة رقم 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(1 ; 2 ; 3) ، B(3 ; 2 ; 1) و C(1 ; 3 ; 3)

1) بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .



2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث

$$(P_1): x-2y+2z-1=0$$

$$(P_2): x-3y+2z+2=0$$

a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان

و ليكن (Δ) تقاطعهما

b) تحقق أن النقطة C تنتمي

إلى المستقيم (Δ)

c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$$ مع $t\in\mathbb{R}$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

أعمال موجهة رقم 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية B(0 ; 0 ; 15) ، A(3 ; 0 ; 10) و C(0 ; 20 ; 0)

1) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة (9 ; 0 ; 0)

c) علّل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

- استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

d) بين أن الجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

e) أحسب البعد OH . استنتج أن EH = 15 و مساحة المثلث EBC .

3) بحساب حجم رباعي الوجوه OEBC بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

- هل يمكن توقع هذه النتيجة من (2 , c)

موضوع محلول

1) ليكن J منتصف [AB] إذن (3 ; 1 ; $-\frac{1}{2}$) ،

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و بالتالي معادلة ديكارتية لـ (P) هي 4x-4y-10z-13=0

2) أ) (P) و (D) وفق مستقيم (D) تمثيله الوسيطي هو

$$\begin{cases} x = \frac{19}{11}t + 2 \\ z = -\frac{12}{11}t - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(D) يقطع (P) في نقطة E إحداثياتها $E\left(2\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

ب) EA = EB = EC = ED

و بالتالي A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E

لكن $EA^2 = (4-2)^2 + 0^2 + (-3+\frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$

النقط A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{\sqrt{41}}{2}$

☜ الشعاع الناظمي لمستو علمت معادلة ديكارتية له هو $\vec{u}(a;b;c)$

☜ نحصل على d باعتبار أن J نقطة من (P)

☜ هناك طريقة أخرى $MA^2 = MB^2$

☜ لأن الشعاعان الناظميان لـ (P_1) و (P_2) غير مرتبطين خطيا

☜ حل الجملة مشكلة بمعادلتي المستويين

☜ إحداثيات E تحقق حل الجملة

$$\begin{cases} x = \frac{19}{11}t + 2 \\ y = t \\ z = \frac{-12}{11}t - \frac{1}{2} \\ 4x - 4y - 10z - 13 = 0 \end{cases}$$

☜ E تنتمي إلى مستويات هي محاور لقطع مستقيمة

موضوع موجّه

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

توجيهات

1. بعد كتابة جملة المعادلتين بثلاثة مجاهل y ، x و z عبّر بدلالة z عن x و y (مثلا) ثم ضع $z = t$ كوسيط لتحصل على التمثيل الوسيطي لـ (D) الذي تظهر فيه مركبات $\vec{u}$ و إحداثيات A .
2. عوّض y ، x و z في معادلة (P') لتحصل على معادلة من الدرجة الأولى مجهولها t و بالتالي الحصول على نقطة تقاطع (D) مع (P')
3. حل الجملة هو نقطة التقاطع بين (D) و (P') و هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى المستويات الثلاثة .

المستقيمات في الفضاء

1 1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(0 ; 0 ; 1) و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له

1) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يشمل B(- 1 ; 0 ; - 1) و $\vec{v}(-1;0;2)$ شعاع توجيه له

2 عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(- 2 ; 7 ; 1) و B(3 ; 5 ; 2) .

- هل النقطتان C(13 ; 1 ; 4) و D(- 12 ; 11 ; 1) تنتميان الى (AB) ؟

3 نعتبر النقط A(1 ; - 3 ; - 2) ، B(- 5 ; 1 ; 3) و C(- 1 ; 1 ; 1) .

أكتب تمثيلا وسيطيا

a) للمستقيم (AB)

b) القطعة [BC]

c) نصف المستقيم [AC)

4 نعتبر المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-t \\ z=-3-2t \end{cases}$$

مع t عدد حقيقي

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يوازي (D) و يشمل النقطة A(-1 ; 2 ; -4) .

5 عين طبيعة المجموعات التالية حيث تمثيلاتها الوسيطية

$$\begin{cases} x=3t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

،

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+3t \\ z=2t \end{cases} \quad t \in [0;1]$$

و

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

6 هل جملة المعادلتين $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-1+9t \\ y=-2-4t \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

و التمثيل الوسيطي

يعرفان نفس المستقيم ؟

7 نفس السؤال السابق مع $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -2x-y+3z-5=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-3+4t \\ y=4-5t \\ z=1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

و

8 نعتبر المستوي (P) : $x - y + 2z = 2$ و النقطة A(4 ; - 2 ; 1)

1) عين $\vec{n}$ شعاعا ناظميا لـ (P)

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيهه

3) استنتج احداثيات H المسقط العمودي لـ A على (P)

9 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(- 3 ; 5 ; - 1) و العمودي على المستوي (P) الذي معادلته : $x - 2y + 3z = 0$

1 $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

عيين تقاطع (D) ومع المستويات $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $(O;\vec{j};\vec{k})$ و $(O;\vec{i};\vec{k})$

1 1) عين مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق

$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3t^2 \\ z = 2 + 2t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2) نفسا السؤال من أجل $t \in [-1;3]$

1 نعتبر المستقيمين d و d' بالتمثيلين الوسيطيين

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ و $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ علىالترتيب

1) بين أن المستقيمين من نفس المستوي

2) عين نقطة تقاطعهما

1 هل المستقيمان

$d : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

و

$d' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي ؟ برّر

1 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(0 ; -1 ; 2) و يوازي (d) حيث :

$d : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \\ z = 5 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

1 بين أن (D) و (D') منطبقان حيث :

$(D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$(D') : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 5 - 6t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

1 بين أن (D) و (D') من نفس المستوي حيث

$(D) : \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$(D') : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

1 نعتبر المستقيمين (D) و (D') حيث

$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$(D') : \begin{cases} x = 3 + 2m \\ y = m \\ z = -1 - 4m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$

1) بين أن المستقيمين ليسا من نفس المستوي

2) عين مستقيما (D") يوازي (D') و يقطع (D)

1 ليكن رباعي الوجوه ABCD و لتكن B' ، D' و C' نظائر A بالنسبة لمنتصفات القطع [CD] ، [BC] و [DB] على الترتيب

1) تحقق أن $(A;\vec{AB};\vec{AC};\vec{AD})$ معلم للفضاء

2) عين تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (BB') ، (CC') و (DD')

3) بين أنّ هذه المستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة J يطلب تحديد احداثياتها

1 بين أن (D) و (D') مستقيمان منطبقان

$$(D):\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-3-t \\ z=-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=9+5t' \\ y=-5-t' \\ z=-8-4t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

بين أن (D) و ('D) مستقيمان متوازيان

$$(D):\begin{cases} x=4-2t \\ y=2+4t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=-2t' \\ y=1+4t' \\ z=t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

بين أن (D) و ('D) لا ينتميان لنفس المستوي

$$(D):\begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=-1+t' \\ y=2-2t' \\ z=5+3t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

بين أن (D) و ('D) متقاطعان

$$(D):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=t' \\ y=1-t' \\ z=-1+4t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

المستويات في الفضاء

1) عين تقاطع المستويين (P) و (Q) في الحالات التالية :

(a

$$(Q):3x+3y+3z-12=0;(P):x+y+z=4$$

(b

$$(Q):3x+3y+3z+12=0;(P):x+y+z=4$$

(c

$$(Q):x+y+z=0;(P):2x-y+z+2=0$$

(d

$$(Q):x-y+2z=5;(P):-3x+2y+z-1=0$$

تحقق أن المستقيمين (D) و ('D) متقاطعان

$$(D):\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=4-5t' \\ y=3-2t' \\ z=-1+2t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)الذي يشمل (D) و ('D) .

تحقق أن المستقيمين (D) و ('D) متوازيان وأكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشملهما .

$$(D):\begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+2t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=1+2t' \\ y=3-2t' \\ z=-1+2t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

عين في كل مرة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

a) (P): -2x + y – z + 3 = 0

$$(D):\begin{cases} x=t \\ y=-1-3t \\ z=2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

b) (P): x + 3y – z + 1 = 0

$$(D):\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

c) (P): x + y – 2z + 2 = 0

$$(D):\begin{cases} x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعتبر النقطتين A(3 ; 3 ; 0) ، W(1 ; 1 ; 1)

1) أكتب معادلة لـ (S) سطح الكرة الذي مركزه W ويشمل A .

2) أكتب معادلة لِـ (P) المستوي المماس لِـ (S) في A

3) لتكن النقط A(1 ; 2 ; -1) ، B(-1 ; 2 ; -1) ، C(0 ; 0 ; -3) و D(1 ; 2 ; -3)
a) تحقق أن النقط A ، B ، C و D ليست على استقامة واحدة
b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)
4) بين أن (BCD) و (P) متعامدان
5) أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

تمرين 2 عين في الحالتين تقاطع المستويات الثلاثة

1) $P): x+y+z=4$

$$(Q): y+\frac{1}{2}z=3$$

$$(R): 3x+2y=6$$

2) $P): x+y+z=4$

$$(Q): -x+y-z=2$$

$$(R): 3x+4y+3z=15$$

تمرين 2 حل في $\mathbb{R}^3$ ثم أعط تفسيرا هندسيا الجملتين التاليتين

1)
$$\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \\ x+y-2z+7=0 \\ -x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

تمرين 3 نعتبر النقط A(2 ; 1 ; 1) ، B(3 ; 0 ; 1) ، D(-1 ; 0 ; 1) ، C(0 ; 1 ; 5) و E(6 ; 2 ; 3)
1) تحقق أن النقط A ، B و C تعرّف مستويا (ABC) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .
2) عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)
3) عين احداثيات النقطة I تقاطع (DE) مع (ABC)

تمرين 3 نعتبر النقطتين A(1 ; 1 ; 1) و B(-1 ; 1 ; 2) من الفضاء و (P) المستوي الذي يشمل النقطة C(2 ; 4 ; 1) و $\vec{n}(-1;-1;5)$ شعاع ناظمي له .

تمرين 3 نعتبر النقط A(1 ; 0 ; 2) ، B(3 ; 2 ; 4) ، C(1 ; 4 ; 2) و D(5 ; 2 ; 4)
نعرف النقط I ، J و K كما يلي : I منتصف [AB] .

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

J منتصف [CD] و
1) عين احداثيات النقط I ، J و K ثم تحقق أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة .
2) تحقق أن $\vec{n}(-2;1;-1)$ ناظمي لـ (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (IJK)

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (A) ثم تحقق أن (IJK) و(AD) يتقاطعان في نقطة L حيث

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

تمرين 3 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A $\vec{u}$ شعاع ناظمي له

1) A(- 1 ; 2 ; 0) و $\vec{u}(1;1;-1)$

2) A(0 ; 0 ; 2) و $\vec{u}(1;0;0)$

3) A(- 1 ; -1 ; 2) و $\vec{u}(-1;0;1)$

تمرين 3 نعتبر النقطة A(1 ; 2 ; 3) والشعاع $\vec{u}(1;2;-1)$
- عين معادلة لمجموعة النقط M التي تحقق $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2$
- ما طبيعة هذه المجموعة ؟

تمرين 3 المستوي (P) معرف بالمعادلة الديكارتية $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-z=0$. عين معلما ديكارتيا للمستو (P).

تمرين 3 (P) هو المستوي الذي معادلته $x+y-2z+3=0$
نعتبر النقطة A(2 ; - 3 ; 1) والشعاعين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(3;-3;0)$.
بين أن ($\vec{v}$; $\vec{u}$; A) معلما متعامدا في المستوي (P).

تمرين 3 المستوي (P) يشمل النقط A(1 ; - 1 ; - 1) ، B(0 ; 1 ; 1) و C(-1 ; 2 ; 0)
1) عين شعاعا ناظميا لـ (P)
2) استنتج معادلة ديكارتية لـ (P)

تمرين 3 (P) مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيطي

$$(P):\begin{cases} x=1+t+2m \\ y=-2+3t \\ z=1-m \end{cases} \quad t,m\in\mathbb{R}$$

نعتبر النقطة A(1 ; -2 ; 1) و الشعاعين $\vec{u}(1;3;0)$ و $\vec{v}(2;0;-1)$
1) بين أن (P) هو مستوي المعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$
2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

تمرين 4 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A(1 ; -2 ; 3) و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعا توجيه له .
(P) المجموعة المعرفة بـ :

$$(P):\begin{cases}x=2-t+m\\y=1+3m\\z=1-t\end{cases}\quad t,m\in\mathbb{R}$$

بين أن (P) مستو يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$x+y-2z+5=0$ 2

1) عين شعاعا $\vec{n}$ ناظميا لـ (P)

2) بين أنّ الشعاع $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه لـ (P)

3) عين أساسا متجانسا $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا مع $\vec{n}$ و $\vec{u}$ على الترتيب

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A(-3 ; 1 ; 2) و يوازي المستقيمين (D) و (D')

الذين تمثيلاهما الوسيطيان هما

$$\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=4+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\qquad ,\qquad \begin{cases}x=2+t'\\y=-5+t'\\z=4+t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$$

نعتبر المستقيمين

$$(D):\begin{cases}x=2-3t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

،

$$(D'):\begin{cases}x=5+2t'\\y=2t'\\z=-5-t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$$

بين أنه يوجد مستو (P) وحيد يشمل (D) و (D') ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (P) .

تقاطعات المستويات

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$2x+y-z+1=0$

والمستوي (P') الذي معادلته $-x+3y-2z+4=0$

1) بين أن المستويين متقاطعان

2) عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x+y-z=0$

والمستوي (P') الذي معادلته $2x-y-z-1=0$

عين شعاع توجيه لمستقيم تقاطعهما

نعتبر النقط A(0 ; 1 ; 1) ، B(1 ; 0 ; 0) ، C(-1 ; 2 ; 1) و D(0 ; 1 ; 2)

بين أن النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية لهذا المستوي

نعتبر النقط A(-1 ; 2 ; 1) ، B(1 ; -6 ; -1) و C(2 ; 2 ; 2) . بين أن النقط A ، B و C تعرّف مستويا يطلب تحديد تقاطعه مع المستوي (P) الذي معادلته $x-3y+z-4=0$.

1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم d تقاطع المستويين (P) و (p') اللذين معادلتاهما $x+y+z=0$ و $x-y+z-4=0$

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P") الذي يشمل A(1 ; 1 ; 2) و العمودي على d .

بين أن المستويات الثلاثة (P) ، (P') و (P") تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها

(P) : $2x+3y-z=-2$

(P') : $5y-4z=1$

(P") : $z=1$

فسّر الجملة هندسيا ثم حلها

$$\begin{cases}4x+6y-12z=5\\6x+9y-18z=8\end{cases}$$

نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases}x+y=-1\\2x+y+2z=0\\4x+4y+z+3=0\end{cases}$$

1) باعتبار أن المعادلتين الأوليتين هما معادلتا مستويين (P) و (P') يتقاطعان في مستقيم (D) يشمل النقطة A(1 ; -2 ; 0) و موجه بـ $\vec{u}(-2;2;1)$

2) تحقق أن (D) و المستوي (P") الذي معادلته الثالثة في الجملة يتقاطعان واستنتج أن الجملة تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه .

نسمي (P) و (p') المستويين اللذين معادلتاهما 2 $x-y+5=0$ و 3 $x+y-z=0$

بين أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases}x=t\\y=2t+5\\z=5t+5\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

حل الجمل التالية و فسّر النتائج هندسي

$$(1):\begin{cases}4x+2y+z=4\\4x-2y+z=-2\\4x-y=0,5\end{cases}$$

$$(2):\begin{cases}5x+3y+4z=-1\\2x+3y+z=-1\\x+y+z=1\end{cases}$$

$$(3):\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y+2z=2 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

$$(1):\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ 2x+3y+z=5 \\ 3x+7y+4z=10 \end{cases}$$

مسائل

نعرف في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة ذات المجهول z : $(E): z^3-12z^2+48z-128=0$

1) تحقق أن 8 حل للمعادلة ، استنتج الحلين الآخرين

2) $(o;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس في المستوي الموجه (الوحدة 1cm) . نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=2-2i\sqrt{3}$ ، $b=2+2i\sqrt{3}$ و $c=8$ على الترتيب .

a) أحسب طويلة و عمدة لـ a و علّم النقط A ، B و C

b) أحسب العدد المركب $q=\dfrac{a-c}{b-c}$ و عين طويلته وعمدة له . استنتج طبيعة المثلث ABC

c) عين D مرجح الجملة $\{(A;|a|);(B;|b|);(C;|c|)\}$ علّم D .

d) عين (T) مجموعة النقط M حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

أنشئ (T) .

نعتبر المكعب ABCDEFGH و الذي حرفه 1 .

a عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر النقطة M من نصف المستقيم [AE] المعرف كما يلي $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{AE}$

1) عين حجم رباعي الوجوه ABDM بدلالة a

2) لتكن K مرجح الجملة $\{(M;a^2);(B;1);(D;1)\}$

a) عبر عن $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BD}$

b) أحسب $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MB}=0$

c) بين أن : $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB}=0$

d) بين أن : K هو ملتقى ارتفاعات المثلث BDM

3) أثبت المساويتين : $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB}=0$ و $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD}=0$

ماذا تستنتج ؟

4) a) بين أن المثلث BDM متساوي الساقين وأن مساحته $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ وحدة مساحة

b) عين العدد a حتى تكون مساحة BDM تساوي 1 وحدة مساحة . أحسب الطول AK في هذه الحالة

الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر مجموعة النقط من الفضاء و التي نرمز لها بالرمز (P_m) و احداثياتها (x ; y ; z) تحقق $(3-m)x+4y-(1+2m)z-5=0$ مع m عدد حقيقي .

1) بين أنه من أجل كل قيم m الحقيقية فإن (P_m) مستو

2) عين نقطة و شعاع توجيه للمستقيم (D) تقاطع (P_0) و (P_1)

3) بين أن (D) محتواة في كل المستويات (P_m)

الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط A(3 ; -2 ; 2) ، B(6 ; 1 ; 5) ، C(6 ; -2 ; -1)

1 (I) بين أن المثلث ABC قائم

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$ بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

1 (II) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات (0 و 4 و -1) ، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

3) بين أن قيس الزاوية $B\hat{D}A$ هو $\dfrac{\pi}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نريد تعيين المستويات التي تشمل المستقيم d المعرف بالجملة

تمارين

$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2z-3=0 \end{cases}$ التالية بحيث تكون هذه المستويات تمس سطح الكرة S التي مركزها A(0 ; 4 ;0)

و نصف قطرها $\sqrt{5}$

1) بين أن المستوي (P) الذي معادلته $x + 2z - 3 = 0$ لا يمس S .

2) نعتبر المستويات (P_a) : $2x+y+1+a(x+2z-3) = 0$

لاحظ أن d محتواة في (P_a) من أجل كل قيم a الحقيقية [باستعمال برمجية مناسبة عرّف A ، عرّف المتغير لعددي a في مجال ، المستقيم d و المستويات (P_a)] ثم عرّف مستقيم تقاطع (P_a) مع (XOY) ثم اختر النمط TRACE و عاين أن (P_a) يشمل كل المستويات التي تحو d عدا واحدا . ملهو ؟

انشئ دائرة تقاطع (P_a) مع S ثم خمّن قيم a التي تعطي المستويات (P_a) التي تمس S

3) أحسب بعد A عن (P_a) ثم عين قيم a حتى يكون (P_a) مماسا لـ S

اختيار من متعدد

S(1 ; -2 ; 0) نقطة ،
(P) مستو معاداته $x + y - 3z + 4 = 0$
جواب واحد فقط صحيح

5 المستقيم (D) الذي يشمل S و يعامد (P) ذو تمثيل وسيطي

$$(a):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(b):\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(c):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(d):\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

6 إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (P) مع (D) هي

a) $(-4;0;0)$ b) $\left(\frac{6}{5};-\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$

c) $\left(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

6 بُعد S من (P) هو :

1) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ 2) $\frac{3}{\sqrt{11}}$

3) $\frac{9}{\sqrt{11}}$ 4) $\frac{9}{11}$

6 نعتبر سطح الكرة الذي مركزه S و نصف قطره 3 . تقاطع السطح مع (P) هو :

a) النقطة I(1 ; - 5 ; 0)

b) الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c) الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

d) الدائرة التي مركزها H ز نصف قطرها $3\frac{\sqrt{10}}{11}$

أصحيح أم خطأ ؟

6 (Q) ، (p) و(R) ثلاث مستويات من الفضاء . (D) و (D') مستقيمان حيث تقاطع (D) مع (P) مجموعة خالية

1) إذا كان تقاطع (P) و(Q) غير خال وتقاطع (Q) و (R) غير خال فإن تقاطع (P) و (Q) و (R) غير خال .

2) إذا كان تقاطع (P) و (Q) و (R) غير خال فإن تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R)

3) تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R) فإن (P) و (Q) و (R) مستقيم .

4) إذا كان تقاطع (D') و (P) غير خال فإن تقاطع (D) و (D') غير خال

5) إذا كان تقاطع (D) و (D') غير خال فإن تقاطع (D') و (P) غير خال

6) إذا كان تقاطع (Q) ، (P) و (R) نقطة فإن تقاطع (P) و (Q) مستقيم .

1) النقطة A(7 ; -2 ; 1) تنتمي الى المستقيم (d)

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

الذي تمثيله

2) مجموعة النقط من الفضاء التي احداثياتها تحقق

$2\,0 = 3 + y - x$ هي مستقيم .

3) مجموعة النقط من الفضاء ذات التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = -1 + 2\cos t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in [0;\pi]$$

4) نعتبر النقطة A(- 1 ; 2 ; 1) والمستقيم (D) الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u}(-5;3;-4)$

- يوجد مستقيم وحيد (Δ) يشمل A و عمودي على (Δ)